數學의 考察과 數學教育의 改善方向

呂 運 邦

최근 科學技術의 영향을 받아 급변하는 국내외의 환경을 감안할 때, 科學教育의 중요성은 심각히 인식되고 있으며 특히 數學教育은 그 비중이 크다고 할 수 있다. 따라서 數學教科課程의 編成은 매우 중요한 위치에 있으며 현재 文教部에서도 中·高等學校의 數學教科書를 새로이 개편하는 작업을 진행하고 있다. 이러한 국가적으로 중요한 작업이 體系的인 研究와 制度的인 改善을 바탕으로 이루어져야 한다는 생각 아래에서, 各級學校의 教科課程, 行政 및 制度, 教科書 執筆 및 指導評價方法에서 나타나는 問題點을 파악하고 改善方向을 모색하는 데에 本稿의 목적이 있다.

數學教育의 목적을 이해하는 데에는 數學의 特性을 파악함이 가장 중요하다고 생각된다. 이 特性의 근원을 算數와 幾何의 發端에서 찾아보았으며 各級學校의 教科內容을 數學의 歷史的 發展段階와 現代數學의 特徵에 비추어 분석하여 보았다. 그 결과 各級學校 教科課程이 일관성있게 배열되지 않은 면이 있고 下位의 能力評價에 치우친 감이 많아, 다음 단계의 교육에 지장을 초래하면서도 오히려 학생들이 數學을 어렵게 생각하게끔 만드는 원인들을 찾을 수 있었다. 이러한 문제를 개선하기 위해서는 長期的 研究를 할 수 있는 專門研究集團과 활성화된 教師의 再訓練制度의 필요성과 아울러 入試制度, 指導方法, 評價方法의 改善이 이루어져야 하겠다.

I. 序

오늘날 尖端化와 國際化가 급속히 일어나고 있는 과정에서 技術隔差의 문제를 모든 國家가 심각히 認識하고 있다. 이러한 國家間 競爭狀況에서 科學分野의 教育은 중요한 위치를 차지하게 되고 특히 數學教育의 중요성은 매우 크다고 생각된다. 더욱 現代社會가 體系化·情報化·自動化됨에 따라 生活數學의 必要性이 날로 증가하고 있다. 數學은 과거부터 各級學校에서 상당한 비중을 두고 교육하여 온 과목이지만 제반여건이 변화한 오늘날, 그 教科課程의 改編이 불가피하게 되었고 教授方法, 評

筆者: 本院 研究委員

* 많은 유익한 의견을 제시하여 준 延河淸, 朴埈卿, 李元暎 博士께 감사드리며 원고정리에 크게 수고한 金珍景 研究助員에게도 감사를 드린다.

價方法도 再點檢할 필요가 있게 되었다. 이에 文敎部에서도 中學校는 1989년도부터, 高等學校는 1990년도부터 改編된 敎科書를 사용할 계획으로 작업을 진행하고 있다. 그러나 이러한 敎育問題는 學生, 學父母, 敎師는 물론 敎育政策과 行政에 관련된 사람들이 관심을 가져야 할 중요한 문제이므로 體系的인 硏究가 필요함은 너무나도 당연한 일이다.

現代生活에서 평범한 개인이 최소한 어느 정도의 數學知識을 가져야 하고 現代의 文明 속에서 數學의 位置와 役割이 무엇인가의 문제들은, 모든 곳에서 敎育의 民主化가 활발히 진행되고 있는 오늘날 그 중요도가 점차 증대하고 있으며 다른 과목의 경우도 마찬가지라 하겠다. 따라서 數學敎育의 目標를 이러한 바탕 위에 定立시키고 이에 따른 敎科內容 및 敎育制度를 再檢討하는 것이 불가피하게 되었다.

또한 해방 이후 주로 敎育學의 側面에서만 연구되어 온 數學敎育의 여러 課題들은 數學의 役割이 擴張된 오늘날 人文·社會·自然系統에서의 다양한 요구도 수용하여야만 되었다. 이러한 事實들을 이해하고 적절한 改善方案을 모색함이 本稿의 目的인바, 數學의 特性을 이해하고 現行 敎科課程을 분석하며 여러 敎育制度上의 問題點을 살펴보고자 한다.

第Ⅱ章의 목적은 數學의 本質的 特性에 대한 분명한 이해를 돕기 위한 것인바, 數學의 始初인 算數와 幾何의 發端을 알아봄으로써 그 特性을 파악하려고 시도하였다. 數學의 全般的인 內容이나 發達過程을 알기 위해서는 數學史를 살펴보아야 하겠지만, 本稿에서는 數學에서 성장의 뿌리가 되는 算數와 幾何의 기본적인 槪念과 方法에 대한 形成過程만을 자세히 살펴보는 것으로서 數學의 特性을 이해하고 더 나아가서 各級學校 敎科內容의 이해에 도움을 주고자 의도하였다. 이는 數學의 特性에 대한 이해를 통하여 數學에서의 단계적인 抽象化過程을 이해할 수 있으며 더욱 筆者가 第Ⅲ章에서 提案하고 있는 各級學校의 敎科內容을 이해함에 어느 정도 도움이 되리라 생각하기 때문이다. 第Ⅲ章에서는 數學敎育의 目的을 定義하고 아울러 現行 敎科內容을 분석하여 보았다. 初·中學校 敎科課程에서 나타나는 몇 개의 改善點들은 分析過程에서 부분적으로 지적하고자 노력하였으며 高校課程은 筆者의 見解대로 內容과 配列을 提案하였으므로 이에 대한 硏究에 參考되길 기대한다. 마지막 第Ⅳ章에서는 數學敎育에 있어서 논란의 대상이 되는 여러 行政 및 制度上의 問題點들과 이에 대한 改善方案을 提示하고 있다.

Ⅱ. 數學의 特性

1. 抽象性, 論理性 및 應用性

專門知識이 없는 一般人도 數學이 지니는 고도의 抽象性, 엄정한 論理性, 다양한 應用性을 알고 있다. 이러한 特性은 科學一般에 보편적인 것이지만 數學에서 한층 확연히 나타나며, 數學의 本質을 파악하기 위해서는 이에 대한 이해를 명확히 할 필요가 있다. 數學의 抽象化는 科學一般과 비교하여 세 가지 特徵을 갖고 있다. 첫째, 對象物들의 모든 性質들로부터 抽象化시킨 量的關係 및 空間形態를 다루

고 있고, 둘째 다른 科學分野보다도 추상화가 훨씬 여러 단계로 일어나고 있으며, 세째 自然科學이 주로 實驗에 의존한 證明을 사용함에 반해 數學은 단지 論證과 計算을 사용한다는 사실에서 알 수 있듯이, 數學은 抽象的 槪念과 이들의 相互關係들만을 다루고 있다. 實體의 수효로부터 "抽象的인 數"에 대한 槪念이 형성되어 九九法과 같은 抽象的인 演算이 수행될 수 있고 幾何에서의 直線이란 槪念도 책상의 모서리 등에서 실존하는 것이 아니라 이들의 性質을 抽象化함으로써 얻어진 사실로 볼 때 數學의 槪念은 實體의 性質로부터 抽象化된 것이다. 自然數와 圖形의 두 개념은 數學에서 가장 初步的인 것들로서, 이들로부터 누적되어 형성된 여러 단계의 추상화로 인하여 오늘날 수학에서의 여러 개념들로 확장된 것이다.

數學者들은 實世界의 事物과 여러 가지 模型들로부터 定理[1]와 方法을 발견하여 왔다. 이러한 구체적인 실체들은 理論의 根據와 定理를 發見하는 道具의 役割을 제공하고 있지만 數學에서의 定理란 엄격한 論理에 의거하여 證明되지 않으면 定理로서 존재할 수 없다. 幾何에서의 어떤 새로운 定理가 模型에 의하여 提示되었더라도 이 定理가 證明되었다고 보는 數學者는 없을 것이다. 예를 들면 二等邊三角型의 證明에서 아무리 정확한 각도기로 측정하여 양 밑각이 같다고 하여도 이는 數學的 證明이 되지 않는다. 公理로부터 명확히 도출된 기본적 개념에 의하여 論證되어야만 정리로 인정되며 이러한 사실은 고등학교 기하에서도 잘 알려진 證明方法인 것이다. 따라서 數學에서는 槪念뿐만이 아니라 方法도 抽象的이며 理論的임을 알 수 있다.

數學의 解答은 論理的 嚴正性에 의하여 평가된다. 數學의 論法은 논란의 여지가 없이 확신을 줄 수 있어야 하며 이러한 論理的 證明에 의한 수학적 진실은 完全無缺의 標準으로 인식된다. 그러나 數學의 嚴正性은 절대적인 것은 아니다. 數學의 原理 자체가 學問的 論爭의 對象이 되기도 하는 등 계속 성장하여 온 사실에서 알 수 있다.

數學의 槪念과 原理가 추상적이긴 해도 현실세계로부터 연유되어 일상생활이나 科學分野에서 널리 應用되기 때문에 수학이 生命力을 지니게 된다. 이런 다양한 應用性이 또 하나의 수학의 특성인바 이 사실은 우리가 전혀 의식하지 못하는 사이 주변에서 일어나고 있다. 建築面積을 測定하는 幾何라든가, 支出을 계산하는 算數 등 간단한 경우로부터 1846년 太陽系의 海王星이 수학적 계산에 의하여 발견된 경우, 英國의 物理學者 Maxwell에 의한 電磁氣波의 發見이 方程式들로부터 유도된 경우 등까지 수많은 예를 볼 수 있다. 더우기 自然科學이나 工學技術의 問題解決을 위한 직접적인 동기에서 연유하지 않고 순수수학의 학문적 관심에서 정립된 抽象的 數學일지라도 광범위한 응용력을 지닐 수 있다. 예를 들면 虛數가 代數學에서 발견된 후 오랫동안 이의 중요성이 인식되지 못하였지만 1800년경에 이에 대한 幾何學的 解釋과 더불어 複素函數論 등의 理論이 발달되어 실생활의 문제에 응용

---

1) 命題란 참과 거짓을 판별할 수 있는 文章을 말하며 定理(theorem)란 참인 것으로 증명된 일반적인 명제를 말한다. 定義(definition)는 用語의 뜻과 개념을 명백히 밝히는 설명이다. 公理(axiom)란 증명할 필요없이 누구나 經驗으로 알 수 있는 推理의 根本命題이며 公準(postulate)이란 공리처럼 절대로 확실하지 않지만, 어떤 理論體系를 演繹的으로 展開함에 있어서 基礎가 되는, 承認을 필요로 하는 根本命題를 말한다.

된 사실이다. 또 다른 예로서 平行線 公準[2]을 증명하기 위한 노력 중에서 나타난 非Euclid 幾何學[3]을 들 수 있는데 1826년 Lobachevsky (1793~1856)에 의하여 창안된 분야이다. 이 幾何學은 처음에는 많은 數學者들이 불합리한 것으로 생각하였지만 그 개념은 一般相對性原理의 基礎가 되어 物理學에서 매우 중요한 이론의 발전에 중요한 역할을 하게 되었다.

2. 算數와 幾何의 發端

前節에서는 數學의 特性을 언급하였지만 이를 명확히 설명하지 못하였다. 그래서 本節에서는 算數와 初級幾何의 生成過程을 통하여 數學의 特性을 이해함에 도움을 주고자 한다. 먼저 理論的 算數가 數의 概念으로부터 시작된 사실을 추적하고자 하는데, 이러한 算數와 후에 설명할 幾何가 함께 純粹數學의 탄생의 계기가 되었음을 알게 될 것이다.

數의 概念(여기서는 잠정적으로 自然數[4]를 언급한다)은 人類의 歷史와 더불어 서서히 확립되어 왔다. 原始人들은 일상생활에서 접하는 대상물의 모임에 대하여 그들 나름대로 수효를 구별하였지만 數에 대한 概念은 없었다. 數 자체가 대상물의 모임에 결부되어 인식되었고 형태나 색깔의 성질도 총체적으로 인식되었다. 오랜 세월을 거치는 동안 對象物들을 比較·觀察하여, 對象物의 性質을 規定하는 要素들을 對象物과 분리하여 獨立된 概念으로 인식하게 되었고 數에 대한 名稱과 關係들도 분명히 定義되게 되었다.

數의 演算(operation)은 구체적인 對象物들의 關係(relation)를 반영하는 過程에서 발생되었다. 덧셈은 여러 集團을 함께 묶을 때에 해당되며 뺄셈, 곱셈, 나눗셈도 쉽게 그 해당되는 경우를 생각할 수 있다. 인간이 수를 셈하는 실제의 경험 속에서 더해지는 數와 더하는 數의 順序가 바뀌어도 결과가 마찬가지라는 事實, 대상물의 수를 세어 갈 때 順序에 영향을 받지 않는다는 事實(序數와 基數가 本質的으로 같다는 事實) 등을 알게 되었다. 이리하여 數들이 독립적으로 생각되어진 것이 아니라 서로 연관된 것으로 생각하게 되었다. 예를 들면 20을 나타내는 英語의 "twenty"는 "two(times)ten"을 의미하며, 로마숫자의 Ⅷ은 5+3을, Ⅸ는 10−1을 의미함을 볼 수 있다. 즉, 數는 개별적인 의미로서보다 서로간의 關係와 法則이 존재하는 시스템으로 인식되어 왔다. 算數[5](arithmetic)의 주제가 바로 이러한 數들의 關係와 法則을 말하고 있다. 예를 들어 6이란 수를 생각할 때, 6=5+1, 6=3·2, 6은 30의 약수 등 여러 성질이 있는데 이들은 항상 다른 수와 연관되어 나타나는 성질에 속

---

2) Euclid의 제5公準인 "한 直線이 두 直線과 만나 같은 측에서 2直角보다 작은 안각의 합이 될 때 이 두 直線을 한없이 연장하면 2直角보다 작은 안각이 만들어지는 측에서 만난다"와 "直線 밖의 한 點을 지나고 그 直線에 平行인 直線은 오직 하나가 존재한다"는 同値로서 이 公準을 사용하지 않으면 絶對幾何學이라 하고, 사용하면 非絶對幾何學이라 한다. Lobachevsky는 이 公準을 부정한 절대기하학의 입장에서 연구하였다.

3) 非Euclid 幾何學의 발달단계는 대략 다음과 같다. 제1기: 初等幾何學의 方法을 적용하여 綜合的으로 研究한 時代(Gauss, Bolyai, Lobachevsky), 제2기: 微分幾何學의 方法을 非Euclid 幾何學에 應用한 時代(Riemann, Beltrami), 제3기: 射影幾何學을 적용하여 非Euclid 幾何學의 射影的 性質을 研究한 時代(Staudt, Cayley, Klein), 제4기: 幾何學의 論理的 基礎를 약간의 公理 위에 설정하고 幾何學의 全體系를 論理的으로 展開한 時代(Pasch, Hilbert, Peano, Russell, Whitehead), 제5기: 非Euclid 幾何學의 物理的 實在性을 主張한 時代(Einstein, Minkowski, Weyl).

4) 整數는 英文으로 "whole number" 혹은 "integer"이며, 自然數는 "natural number", "positive integer", "counting number" 등으로 표시된다.

5) 算數의 英文表記는 그리스語에서 유래된 "arithmetic"인데, 그 뜻은 "art of calculation"이다.

〈表 1〉 代表的 記號의 發展

A. 言語로 표시하는 단계	미지수의 세제곱에 3을 곱하고 여기서 미지수의 제곱에 6을 곱한 값을 빼준 것은 미지수에 4를 곱하여 5를 더한 수와 같다.
B. 略語로 표시하는 단계	3 CU $\overline{m}$ Cu 6 sq ae 4 no $\overline{p}$ 5 (3 cubes minus 6 squares equals 4 numbers plus 5)
C. 記號로 표시하는 단계	
Viete(1591)	3 Acu-6Aq aequatur 4A+5
Descartes(1637)	3 xxx-6xx ∞ 4x+5
Wallis(1693)	$3x^3-6xx=4x+5$
현재의 표시	$3x^3-6x^2=4x+5$

		덧 셈	뺄 셈	곱 셈	나눗셈	등 호	미 지 수	제 곱	세제곱
현재의 표시		x+y	x−y	x·y 혹은 xy	$\frac{x}{y}$ 혹은 x/y	=	x	x^2	x^3
원 전	시대								
Diophantas (그리스)	250		↑					Δ^{γ}	K^{γ}
Bhaskara (힌두)	1150		ya 6	ya 6 bha	$\frac{6}{2}$		ya, ka		
Pacioli (이탈리아)	1494	$\overline{p}$	$\overline{m}$				co	ce	cu
Widman (독일)	1489	+	−						
Recorde (영국)	1557	+	−			=			
Viete (프랑스)	1591	+	−	6A	$\frac{6}{2}$		A (E, O)	Aq	Acu
Harriot (영국)	1631	+	−	6·2		=	a	aa	aaa
Descartes (프랑스)	1637	+	−	6x	$\frac{x}{2}$	∞	x	xx x^2	xxx x^3
Wallis (영국)	1693	+	−	6x	$\frac{x}{2}$	=	x	xx	x^3

註 : 1) √ 기호는 1525년 Christoff Rudolff가 root를 뜻하는 라틴어의 radix에서 첫글자 r과 비슷하게 하여 사용했음.
2) × (곱셈) 기호는 1600년경 영국의 Oughtred에 의해 사용되었으나 미지수를 나타내는 문자 x와 비슷하여 사용에 적당하지 않았음. 1583년 Clavius가 3×4를 3·4로 쓰는 식으로 점(dot)을 사용하였고 Leibniz에 의하여 대중화됨.

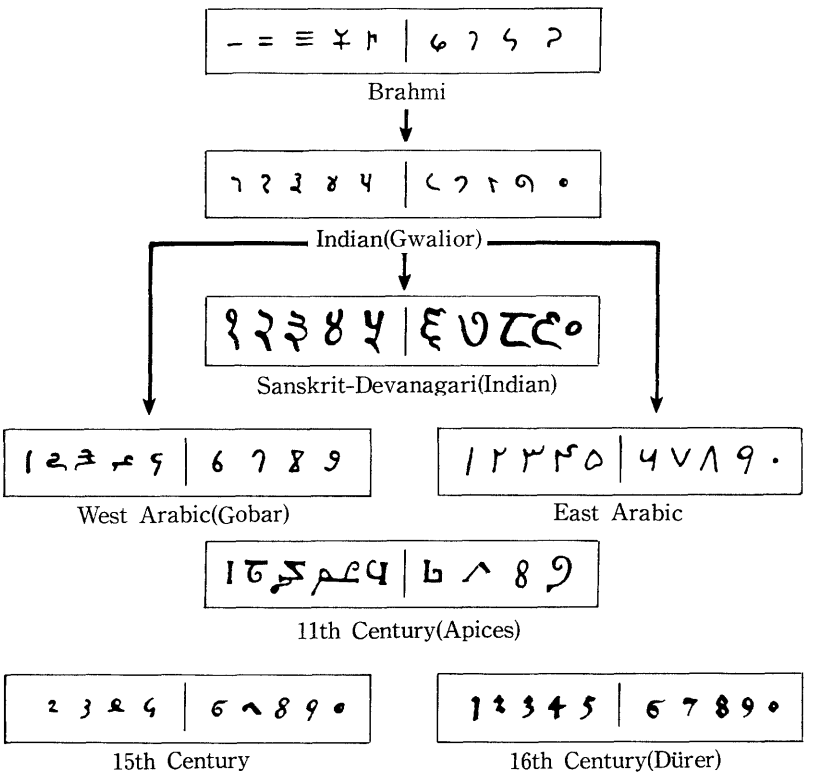
한다. 이와 같이 算數의 演算은 數들 사이의 關係들을 決定하며 이러한 關係들은 對象物들의 모임 속에서 나타나는 실제의 量的關係를 抽象化한 것이다. 그러므로 算數란, 순수히 關係만을 다루는, 즉 實際의 量的關係를 抽象的 思考로써 다루는 科學이다. 다시 말하면 算數란 순수한 思考能力으로부터 발생된 것이 아니라 實際의 事物에 대한 明確한 性質을 反映한 것으로서 오랜 세월에 걸친 實質的인 經驗으로부터 발전되어 왔다.

社會生活이 점차 廣範圍해지고 複雜해짐에 따라, 대상물의 수효를 기록하고, 타인에게 구두로 전하고, 엄청나게 증가하는 다수의 집단을 계산하는 등의 문제에 직면하게 되었다. 이리하여 數에 대한 名稱만이 아니라 이를 나타내는 記號의 使用이 불가피하였으며, 數의 演算 혹은 公式을 나타내는 數學的 記號와 文字의 使用이 점차 도입되었다. 이러한 數學的 記號, 數學的 文字의 使用으로 인하여 일상생활 속의 많은 사실들이 모든 사람들에게 명확히 인식될 수 있었고 결국 오늘날과 같이 世界 共通의 數學的 記號가 탄생된 것이다.

현재 사용되는 數學的 記號와 아라비아數字는 하루아침에 개발된 것이 아니라 여러 민족, 오랜 세월을 통해 便利性에 의하여 점차 波及되며 變遷해 왔다. 아라비아數字로 불리는 오늘날의 數를 예로 들면, 10세기경 인도에서 사용되던 것이 아라비아 사람들에 의해 유럽에 전파된 후 다음 몇 세기를 거치면서 정착된 숫자인 것이다(圖 1). 또한 오늘날 사용하는 數의 體系를 보면 10進法임을 알 수 있는데 이는 인간이 10개의 손가락을 갖고 있다는 신체적 이유 때문이며, 이 "十進位置的 記數法"은 인도에서 처음에는 1에서 9까지 아홉개의 숫자가 사용되다가 6세기경 0(零)의 記號가 추가됨으로써 확립된 것이다. 十進位置的記數法이란 말의 "位置的"이 의미하는 것은 372에서 3은 백단위를, 7은 십단위를 나타냄을 뜻하는데, 이러한 편리성은 로마 숫자등에서는 찾아 볼 수 없는 것이다. 특히 덧셈, 곱셈 등의 연산에 있어서 매우 편리한 記數法인 것이다. 이렇게 편리한 記數法의 사용이 인도에서 수학이 일찍부터 발달한 이유이다. 〔圖 2〕는 5進法을 가상하여 數字 記號의 發明과 位置的 表示를 例示한 것이다. 微積分學의 발견자의 한 사람인 Leibniz(1646~1716)도 "解析學의 秘密은 記號의 使用度에 있다."고 말할 정도로 간편한 記號를 사용하였으며 이것이 그의 큰 공적으로 꼽히고 있다. 記號와 文字의 使用으로써 오늘날 만국어처럼 쓰여지는 數學的 表現이 數學의 合理性 및 論理性의 전개에 매우 편리함은 많은 사람들이 공감하는 사실인 것이다. 〈表 1〉은 代數的 記號의 發展過程을 보이고 있다.

BC 3세기경의 그리스인들은 수가 끝없이 커질 수 있다는 사실뿐만이 아니라 任意의 數들을 演算할 수 있고 이들에 대한 一般的인 定理를 證明하고 公式化할 수 있다는 사실도 알고 있었다. 이러한 생각은 그들의 경험에서 얻어진 여러 사실을 일반화시키는 과정이었고, 이로부터 數에 대한 일반적인 思考方式과 規則이 대두되었다. 數가 무한히 커질 수 있다는 사실로부터 無限大의 槪念이 수학에서 자리잡았다. 실제로 數를 무한히 세어 갈 수는 없지만 무한히 커질 수 있다는 "可能性"이 중요한 의미를 갖게 되어, 어떠한 量的關係뿐만이 아니라 "모든 可能한" 量的關係까지도 數學의 主題에 포함되고 따라서 無限大의 槪

[圖 1] 인도·아라비아 數字의 變遷課程



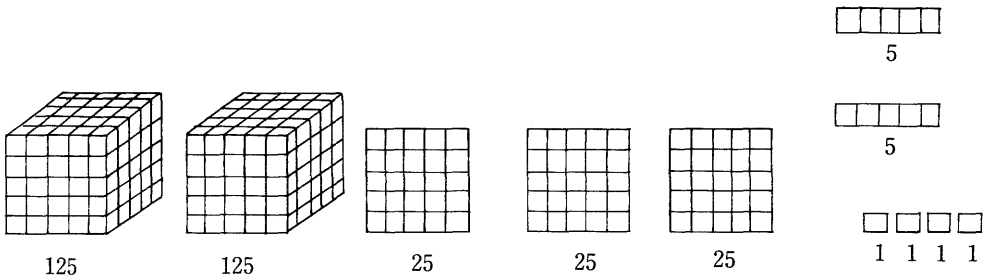
Karl Menninger, *Zahlwort und Ziffer* (Göttingen : Vanderhoeck & Ruprecht, 1957-1958, 2 vols.), II, p.233에서 옮김.

念이 정립된 것이다. 이와 같이 實生活의 限界를 벗어나 抽象化되어 가면서 算數가 數의 理論으로 변환되었다. 이 사실은, 구체적인 實生活의 問題에서 抽象的인 槪念과 論理의 領域으로 이동하여 확립된 數의 理論이 앞에서 언급한 수학의 특성들을 가진 순수수학의 발전에 기여하는 계기가 되었음을 말하고 있다.

幾何의 生成過程도 算數의 경우와 유사하다. 幾何의 生成年代도 紀元前으로 거슬러 올라가고 그 生成動機도 실생활에서 유래되었다고 볼 수 있다. 옛날 사람들은 幾何學的 圖形을 自然으로부터 본떴다. 보름달, 초승달, 곧게 뻗은 햇살, 호수면, 산, 강 등을 보고 이들을 표시하였다. 자연속에는 정확히 一直線으로 된 것을 찾기가 드물며, 三角形, 直四角形의 모양도 마찬가지이다. 그러나 이러한 圖形의 槪念이 사람들 마음속에 서서히 자리잡게 된 이유는 그들의 생활에서 찾을 수 있다. 집을 세우고, 돌을 자르고, 땅에 울타리를 치고, 도자기를 만드는 과정에서 曲線과 直線의 槪念이 생겨났다. 오늘날의 어린이들은 直線으로 이루어진 수많은 대상물을 접하고 있기 때문

[圖 2] 假想的인 記數法의 發展段階

A. 基數를 5라 하자. 즉, 5進法으로 예를 든다.



B. 각 묶음에 대한 記號를 發明

1 → |

5 → ☆

25 → ⊙

125 → ❀

❀ ❀ ⊙ ⊙ ⊙ ☆ ☆ | | | |

C. |, ||, |||, ||||를 記號化함

| → |

|| → 〉

||| → △

|||| → □

D. 乘法表示法을 使用

〉❀△⊙〉☆□

❀⊙☆|

혹은 〉△ 〉□

E. 位置的 表示法을 使用

〉△〉□

F. 零(zero)의 發明

零을 ○로 表示하고 이를 位置表示에 使用함.

△ □ (3× 5)+4=19

△ □ ○ (3×25)+(4×5)+0=95

△ ○ □ (3×25)+(0×5)+4=79

에 直線에 대한 명확한 槪念을 갖고 있다.

幾何를 나타내는 英文의 geometry는 "땅을 잰다." 라는 뜻의 그리스語에서 유래되었다 (geo는 땅, metron은 잰다 라는 뜻). 고대의 이집트나 바빌로니아 사람들은 간단한 면적이나 부피를 계산할 수 있었으며 심지어는 원의 둘레가 지름에 비례하는 사실도 알고 있었다. 그러나 당시의 수준은 定理와 證明으로 이루어진 理論的 科學으로서의 幾何가 아니라, 당시의 算數와 마찬가지로 경험에서 얻어진 결과들을 모아 놓은 것에 불과하였다. BC 7세기경 이집트에서 그리스로 넘어간 幾何는 Thales (BC 624?~548?), Democritus(BC 460?~370?) 등에 의하여 발전되었으며 그 이후 Pythagoras(BC 580?~500?)[6]는 이 분야에 상당한 공헌을 하였다.

幾何의 發展은 계속하여 새로운 사실을 綜合하고 이들의 相互關係를 確立시키는 방향으로 일어났다. 이 관계들은 幾何에서의 命題를 다른 命題들로부터 論理的으로 이끌어 내는 형태로 점진적으로 변환되었다. 이러한 결과, 幾何學的 定理와 證明의 槪念이 확립되었고, 소위 말하는 公理라는 기본적인 命題가 설정되어 이로부터 다른 命題들이 演繹되었다. 이와 같이 幾何는 數學理論으로 발전되어 갔다. BC 3세기 Euclid(BC 330?~275?)[7]는 幾何學의 내용을 조직적으로 구성하였으며, 이 Euclid의 幾何學은 그 후 2000여년이 지난 19세기의 Lobachevsky에 이르기까지 별로 추가된 내용없이 답습되어 왔다. 물론 수학의 계속적인 발전에 따라 그 내용이 심화되긴 하였지만 純粹數學의 典型的인 標本으로서 Euclid의 業績은 남아 있는 것이다. 그는 이전 사람들의 성과와 그 자신의 결과를 함께 묶어 獨創的인 理論的 科學으로 정립시켰으며 이 내용이 오늘날에도 사용되고 있다.

3. 數學의 本質

前節에서는 數學의 本質을 이해하기 위한 예비적인 설명으로서 算數와 幾何의 誕生과 發達過程을 살펴보았다. 이 결과 讀者들 스스로가 數學의 本質을 파악했으리라 추측되지만 조금 더 명확한 이해를 돕기 위하여 다음과 같은 質問을 생각하여 보자.

質問 1) 抽象的인 數學的 槪念이 實生活에서 무엇을 反映하고 있는가? 즉, 數學에서 실제의 關心問題는 무엇인가?

質問 2) 왜 抽象的인 數學의 結果가 그렇게 確實하며 基本槪念이 明確한가?

---

6) 直角三角形에 관한 定理로서 잘 알려져 있는 Pythagoras 는 數의 理論, 音樂, 天文學에도 많은 업적을 남겼다. 그는 秘密學派를 세워 硏究活動을 하였으며 이 학파는 對稱性으로부터 兩立하는 10쌍의 原理 즉, 有限과 無限, 홀수와 짝수, 單數와 多數, 右側과 左側, 男과 女, 靜과 動, 直線과 曲線, 빛과 어둠, 善과 惡, 正四角形과 直四角形을 표로 만들었다. 완전한 對稱性을 지닌 것은 圓과 球라는 주장으로 미루어 이 학파에서는 天體나 宇宙가 球形을 이룬다고 생각하였을 것이다. 또한 그들은 數의 理論을 "arithmetic"이라 부르고 數를 計算하는 것을 "logistic"이라 하였는데 현재 우리가 數를 計算하는 算數를 "arithmetic"이라 하는 것과 차이가 있다. 그리고 소위 中世大學의 四科인 幾何學, 數의 理論, 音樂, 天文學을 통하여 "mathematics"(그리스 語로 "배워지는 것"이란 뜻)라 하였고 이 단어가 오늘날 數學을 뜻하게 되었다.

7) Euclid의 생애는 불분명하다. 그는 당시까지 발전된 基礎幾何를 幾何原論("stoicheia" 혹은 英文의 "Elements")에 體系的으로 整備하였다. 성경책과 더불어 인류 역사상 가장 많이 읽힌 이 책은 20세기초까지도 英國에서는 그대로 敎科書로 사용되었는데 현재 中·高等學校에서 가르치는 수준에 해당된다. 13권으로 구성된 이 수학책은 定義, 公理, 命題 등으로 Platon 時代까지 알려진 初級數學을 총집약한 것이다.

즉, 數學의 方法들이 얼마나 튼튼한 基盤 위에 서 있는가?

質問 3) 數學이 그렇게 抽象的임에도 불구하고 왜 多樣한 應用力을 가질 수 있고 한가한 抽象的인 놀음이 아닌가? 즉, 實生活에서 數學의 重要性이 어떻게 說明될 수 있는가?

質問 4) 抽象化와 應用力을 함께 유지하면서 數學을 發達시키는 힘은 무엇인가? 즉, 끊임없는 數學의 成長을 위한 原動力은 무엇인가?

간혹 理想主義者나 形而上學者는 위의 기본적인 질문에 대한 답을 구함에 있어서 혼란에 빠질 뿐만 아니라 數學을 왜곡시킬 정도에 이르는 경우가 있다. 다시 말하면 理想主義者는 極端的으로 抽象的이고 그럴듯한 數學의 結果만 보고 數學이란 純粹한 思考能力으로부터 나온다고 상상할 것이다. 실제로 數學이란 理想主義나 形而上學에 대한 대수롭지 않은 뒷받침을 해주는 것이 아니다. 우리가 數學의 本質에 대한 앞의 질문들을 답하려고 노력할 때 우리 자신이 그 本質에 대한 확신을 가질 것이다.

質問 1)의 답은 이미 앞의 算數와 幾何의 誕生에 대한 내용에서 나타나 있다. 算數의 槪念은 實對象物의 量的關係에 해당되며 수많은 經驗을 分析하고 一般化시키는 抽象化의 過程으로 確立되었고, 幾何는 實體로부터 색깔, 밀도, 무게 등의 다른 성질들을 제외하고 空間的인 形態와 位置關係를 抽象化한 것이다. 이 過程은, 점진적으로 對象物과 數와 連結되고, 抽象的인 數가 定義되고, 思考可能한 모든 數를 포함하는 數의 槪念으로 擴大되었다. 이러한 각 段階는 實際의 經驗과 앞선 抽象的 槪念의 結合으로 진행되었는데 抽象化, 一般化를 거듭하는 基本原理에 속한다. 특히 이러한 역사적 사실은 理想主義의 觀點에서 보는 "純粹한 思考", "天性的인 直觀"으로부터만 數學이 발전되지는 않았음을 보여주고 있다.

質問 2)의 답도 역시 算數와 幾何의 歷史로부터 얻을 수 있다. 算數와 幾何의 結果들은 오랜 기간동안 蓄積된 經驗을 反映하며 사람들의 마음속에 확고히 자리잡게 되었다. 言語上으로도 분명하게 표현되어 왔다. 즉, 數의 名稱이 생기고, 記號를 使用하고, 日常生活에서 수없는 반복을 통하여, 사람들이 算數의 結果에 대하여 確信하게 되었다. 이렇게 數學의 槪念과 計算結果가 確信되어 온 사실과 마찬가지로 論理的 思考方式도 確信되어온 바, 여기서 本質的인 것은 사람들이 任意로 反復하여 結果를 얻을 수 있다는 사실뿐만 아니라 實生活의 여러 關係들 속에서 共通的으로 存在하는 完全하고 明白한 方法들이 數學의 槪念과 論理的 誘導의 法則 속에 反映되었다는 사실이다. 따라서 수천년의 經驗을 통하여 사람들 마음속에서 일어나고 자리잡은 基本槪念과 論理的 方法에 의한 數學의 結果는 모두에게 明確할 수 있는 것이다.

質問 3)의 대답은 간단하다. 數學의 槪念과 結果는 많은 經驗을 一般化하였고 항상 마주치는 日常生活에서의 일들을 抽象的인 形態로 反映하였기 때문이다. 간단히 말하면 많은 것으로부터 一般化되고 抽象化된 結果는 다시 많은 것에 응용되기 때문이다. 이 사실은 비단 數學分野에만 적용되는 것이 아니라 모든 抽象的 槪念과 理論에 해당되는 사실이다. 그러나 抽象的인 槪念이 應用되는 범위는 어떤 條件에 따라 制限되는 경우가 많다. 특히 일반

적인 實驗의 目的에서 알 수 있듯이, 應用되는 對象에 대한 確信이 없이는 적용하기 힘든 경우가 있을 수 있다. 덧셈의 법칙이 물 1ℓ와 알콜 1ℓ를 합할 경우에 적용되지 않는 사실이 그 예이다(실제로는 1.9ℓ가 됨).

質問 4)의 답도 그 역사를 보면 분명해진다. 간단히 말하면, 이 힘은 社會生活에서 나타나는 實質的인 要求에서 나타난다. 이러한 實質的 要求와 이로부터 일어나는 抽象的 思考는 항상 相互作用의 循環을 만드는데, 抽象的인 反映이 當面問題의 要求보다 앞서 발전하기도 하고 蓄積된 經驗으로부터 抽象化의 段階로 發展하기도 한다. 위 두 가지의 相互作用은 보통 연구하는 사람들이 "理論과 實際"라는 말을 자주 사용하는 이유도 된다.

4. 算數와 幾何의 相互作用

第2節에서 우리는 算數와 幾何의 相互關係에 주의하지 않았지만 그 相互關係가 매우 중요함을 알아 보고자 한다. 서로 다른 學問 사이에서도 마찬가지이지만, 數學에서 각 분야의 理論들은 相互作用됨으로써 數學 자체의 發達을 誘導하며, 이러한 理論들이 反映되고 있는 實體上의 相互關係들이 發見되기도 한다.

算數와 幾何는 서로 영향을 줄 뿐만이 아니라 결합되어 더 높은 수준의 理論과 方法을 찾아내는 역할을 하고 있다. 근본적으로 算數와 幾何는 數學 全般에 걸친 성장의 뿌리인 것이다. 어떤 길이를 주어진 單位를 사용하여 測定할 때, 이 單位의 適用은 幾何의 問題이지만 몇개의 單位인지의 計算은 算數의 問題이다. 이와 같은 測定過程에서 길이가 單位의 整數倍가 되지 않고 우리가 익숙한 소위 分數[8]로 나타나는 경우가 많다. 이러한 경우에 의하여 分數가 실제로 發生되어 數의 槪念이 整數로부터 分數로 擴大된 것이다(數學用語로 有理數로 擴大됨). 分數의 槪念은 원래 實生活에서는 整數의 나눗셈으로부터는 발생하지 않았고 발생할 수도 없었다. 즉, 세 사람, 세 개의 창 등은 의미가 있지만 2/3 사람, 2/3 창 등은 의미가 없기 때문이다. 다시 말하면 連續的인 크기의 나눗셈에서 일어날 수밖에 없었던 것이다. 이와 같은 分數의 出現은 算數와 幾何의 相互作用으로부터 일어나는 첫 段階이었다.

다음은 無理數[9]의 出現에 대해 설명하고자 한다. 처음에는 사람들이 모든 區間을 分數로 表示할 수 있는가에 대한 根本的인 疑問을 갖고 있지는 않았다. 길이를 측정할 때 매우 작은 부분은 그저 무시하면 되기 때문이었다. 실제로 測定의 無限한 正確度에 대하여 말하는 것은 의미가 없는 것으로 생각하였다. Democritus 조차도 면적이나 부피를 측정할 때 原子의 槪念으로 생각하였다. 그때만 하여도 오늘날의 幾何의 槪念과는 달리, 모든 實體가 原子로 構成되었다는 기준으로 幾何學的 圖形을 생각하였다. 그러나 이러한 原子로 構成되었다고 생각하는 區間의 길이가 Pythagoras의 定理에 矛盾이 됨을 알게 되었는데 이를 설명하면 다음과 같다. 直角二等邊

8) 分數는 英文으로 "fraction"이라 하며 分母(denominator)와 分子(numerator)가 整數인 分數를 有理數(rational number)라 정의한다. 小數는 英文으로 "decimal fraction"이라 하는데 이는 十進分數 즉, 分母가 10인 分數에서 分子들을 마침표(소숫점) 아래에 나열함으로써 표시한다(本節의 뒤에서 설명).

9) 無理數는 英文 "irrational number"라 표시되는데 이는 "생각하기 힘든", "잴 수 없는" 크기를 뜻함을 알 수 있다. 無理數와 有理數를 합하여 實數(real number)라 한다.

三角形의 밑변이 a이고 빗변이 b일 때, Pythagoras定理에 의하여

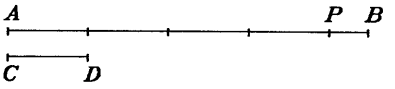
$$b^2=a^2+a^2=2a^2 \text{ 즉, } (b/a)^2=2$$

가 성립하는데 제곱하여 2가 되는 분수 b/a는 존재하지 않는다(이의 증명은 高校數學教科書에 있음). 따라서 直角二等邊三角形의 밑변 혹은 빗변이 原子單位의 正確度로도 잴 수 없음을 알게 되었다. 이러한 사실은 그리스의 科學者들에게 큰 충격을 주었고 Zenon(BC. 490?～430?)이 運動의 矛盾을 주장하는 원천이 되었다. Euclid의 幾何學 原本에서도 이 사실을 解說하고 있다. 이러한 사실들에서 無理數의 起源을 찾을 수 있는데 그리스 학자들 사이에서만이 아닌 東洋의 數學者들에게서도 이 無理數의 槪念을 찾을 수 있다. 1870년경이 되어서야 幾何와 관련없이 無理數에 대한 槪略的인 定義가 주어졌다(獨逸 數學者 Weierstrass(1815～1897), Dedekind(1831～1916), 이탈리아 數學者 Cantor(1845～1918) 등에 의하여 여러 형태로 정의됨). 여기서 우리는 하나의 抽象的인 槪念이 정확히 定義되기까지 얼마나 많은 세월이 필요하고 어려운가를 알 수 있다.

앞의 無理數의 出現에 대한 내용에서 알 수 있듯이 有理數와 無理數를 통칭한 實數는 한 基本單位에 대한 比率로써 나타나며 이는 具體的인 사물로부터 抽象化된 크기의 比率인 것이다.

抽象的인 自然數들의 相互關係가 數學的 關心의 對象인 것처럼 抽象的인 實數에 대해서도 그들의 關係가 數學的 硏究對象이 된다. 算數에서와 마찬가지로 實數體系에서 가장 먼저 定義되어야 할 것이 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈의 演算들과 "크다" 혹은 "작다"의 大小關係이다. 이들 演算과 關係는 여러가지 實生活에서의 크기들을 반영시키고 있으며, 차츰 중요한 성질들이 발견되어 감에 따라 가장 중요한 성질인 連續性이 定義되어, 연속적으로 변하는 크기의 抽象的 影像이 바로 實數體系가 되었다.

이 중요한 連續性을 이해하기 위해 우선 實數의 表示法을 생각하여 보자. 다음의 그림에



서 CD의 단위로 AB의 길이를 나타내는 問題를 생각할 때 CD의 整數倍(n배)인 AP와 CD보다 짧은 나머지 PB가 나타난다. 다음에 CD를 10等分한 후 이것으로 PB를 측정하면 앞에서와 마찬가지로 n_1배와 나머지를 얻게 된다. CD의 10등분한 길이를 다시 10등분한 길이로, 즉 CD의 1/100로 그 나머지를 측정하는 방법을 계속하면, CD에 대한 AB의 비율을 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\frac{AB}{CD}=n+\frac{n_1}{10}+\frac{n_2}{100}+\frac{n_3}{1000}\cdots\cdots$$
$$=n\cdot n_1\ n_2\ n_3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

이렇게 표시되는 十進分數(decimal fraction)는, 우변의 표시를 볼 때, 우리가 보통 小數라고 부르는바, 무한히 계속될 수도 있고 유한할 수도 있다. 이는 測定의 正確度에 직결됨을 알 수 있다. 實世界에서의 具體的인 事物에 대해서는 이러한 방법들을 무한히 적용할 수 없으므로 위의 比率은 抽象的인 比率, 즉 實數를 나타내고 있다고 생각하여야 한다. 이와 같이 抽象的으로 定義된 實數들은 이러한 十進分數들의 演算을 이들의 실제 크기들의 演算과 一致되게 定義함으로써 完全한 實

數體系를 이루게 된다. 그러나 이 演算을 정의함에 있어서 十進分數가 有限할 때는 가능하지만 無限한 경우에는 어려움에 부닥친다. 이 경우에 대한 엄밀한 演算의 定義는 다음과 같다. 예를 들어 a와 b의 덧셈을 생각할 때 小數點 이하의 주어진 자릿수까지 사용하여 더한다. 만일 100만분의 1 자릿수까지 사용하였다면 $a+b$의 正確度는 그 誤差가 100만분의 2를 넘지 않는다. 이로부터 우리가 원하는 任意의 正確度로 두 實數의 덧셈이 정의된다. 이렇게 정의된 덧셈은 정해진 正確度 내에서의 演算이란 短點을 갖는데, 이는 a와 b가 무한히 정확하게 표시될 수 없다는 源泉的인 性質로부터 존재하는 短點이다. 大小關係도 덧셈으로 정의될 수 있다. 즉, 陽數인 c가 존재하여 $a=b+c$일 때 "a가 b보다 크다" 라고 정의될 수 있는 것이다.

이상의 算數와 幾何의 相互作用으로부터 우리는 數學의 발전은 具體的-抽象的, 特殊的-一般的, 形式的-實質的, 有限的-無限的, 離散的-連續的 등의 兩立性 속에서 일어났음을 알 수 있다. 이들 각각의 性質에 대한 자세한 설명은 생략하고 다만 離散的-連續的인 두 性質에 대해서만 잠깐 언급하고자 한다. 整數와 分數만이 數의 槪念 속에 있고 잴 수 없는 크기의 존재를 아는 상태로 오랜 세월이 흐르고 난 17세기에 이르러서 이 두 성질에 대한 槪念이 微積分의 기반 위에 다시 등장하게 되었다. 無限小(infinitesimal)의 槪念이 바로 이것으로서 면적이나 부피의 計算은, 혹은 다른 말로 積分은, 無限小의 無限한 合으로 생각하게 되었다. 이는 離散性에 중심을 둔 觀點이었다. 그러나 이 觀點 역시 만족한 것이 되지 못하였는데 線을 無限히 分割하면 點이 될 수 있는가, 혹은 點을 無限히 모으면 線이 될 수 있는가의 問題 등과 관련되는 觀點이었기 때문이다. 따라서 Newton의 連續變量 혹은 連續變數(continuous variable)의 槪念이 나타났는데, 이 連續變數가 한없이 零으로 減少하는 것으로서 無限小를 나타내었으며 이러한 槪念은 極限(limit)의 理論이 발견된 19世紀 初까지 계속되었다. 이리하여 實數의 區間은 不可分의 點들로 이루어진 것이 아니라, 연속적인 크기의 각 값(혹은 각 점)을 결정할 수 만 있는 連續的인 媒體 혹은 幾何的 "擴張體"로 생각되었다. 따라서 다시 連續性으로 還元되었다. 그러나 解析學의 發展은 임의의 값을 갖는 變數의 크기를 표시하는 實數에 대한 一般的인 定義에서 좀더 正確性을 必要로 하였고, 1870년경에 實數의 區間을 點의 集合으로 표시하는 實數의 理論이 등장하여 變數가 취할 수 있는 값의 범위도 實數의 集合으로 생각하게 되었다. 이리하여 또 다시 連續的인 것은 離散的인 點들로 구성되었다고 생각하고 連續性은 點의 集合에 대한 構造로서 표현되었다. 이 槪念으로 인하여 數學은 막대한 진전을 하였고 오늘날 集合의 槪念이 모든 數學分野에 중요한 영향을 주게 된 것이다. 이후 계속하여 數의 槪念, 變數의 槪念, 函數의 槪念 등에 많은 발전이 있어 왔으며 앞으로도 계속 발전하리라 예상된다.

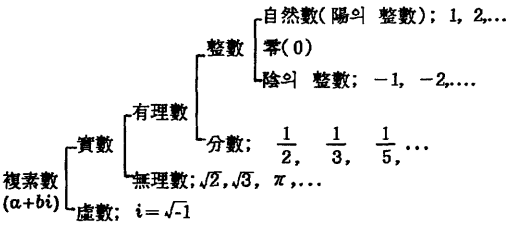
지금까지는 實數의 槪念에서 算數와 幾何의 相互作用이 중요한 역할을 하였음을 알아 보았다. 특히 幾何가 代數學(algebra)[10]과 결

10) 아랍의 Al-Mansur 王朝(AD 754~775)때에 인도의 代數學이 건너왔고 그 이후 代數的 計算을 바탕으로 한 독특한 幾何學이 탄생하였다. 그 時代의 가장 유명한 학자로서 825년경의 Al-Khowarizmi는 算數와 代數學에 관한 책인 "Al-

합하여 나타난 결과로서 陰數의 槪念과 複素數의 槪念을 들 수 있는데 이를 설명하면 다음과 같다. 인도인들에 의하여 발명된 陰數는 빨셈의 記號를 써서 만들어졌다. 이들은 이미 陽數의 빨셈을 陰數의 덧셈으로 고쳐 생각하였고 陽數를 資産, 陰數를 負債로 보는 등 陰數와 陽數에 具體的인 意味를 부여하기도 하였다. 앞에서 언급한 0의 발견과 더불어 陰數의 發明은 인도인들의 큰 업적인 것이다. 그러나 16세기까지는 실제로 陰數를 數로 생각하지 않았다고 추측된다. 科學과 商業이 발달함에 따라 어떤 基準點에 대하여 셈을 하던가, 크기를 잴 때 方向을 생각할 필요가 생겼고 數直線 위에 0을 基準點으로 하여 數를 나타내게 되었다. 가장 의미있는 陰數의 記錄으로는 1545년 이탈리아 사람 Cardan(1501~1576)이 陰數를 方程式의 解로 취급하였으며 陰數의 演算들도 설명하였다. 數直線 위에서 陰數는 0의 左側에 표시되는데 이는 幾何學的인 表示法이다.

현재 우리가 數의 全集合(universal set)이라고 말하는 複素數(complex number)는 虛數(imaginary number)의 發見으로 완성되었으며 虛數는 陰數의 제곱근을 생각하는 과정에서 탄생되었다. 850년경의 Mahavira 와 1150년경의 Bhaskara가 모두 힌두인으로서, 陰數의 제곱근이 불가능하다고 언급한 사실을 볼 수 있고, 1545년 Cardan이 陰數의 제곱근을 처음으로 計算에서 사용하였다. 또 1572년

[圖 3] 數의 體系



Bombelli(1530년경~1572)가 모순이 없는 虛數의 理論을 소개하였다. 그 후 1637년 Descartes가 方程式의 解로서 複素數를 언급할 때 오늘날에 사용하는 實數, 虛數의 名稱을 사용하여 구분하였다. 1748년 Euler(1707~1783)는 $\sqrt{-1}$ 을 i로 처음 표시하였으며 1832년 Gauss(1777~1855)가 "Complex Number"라는 단어를 소개하였다. 複素數는 幾何學的으로 座標平面 위에서, 橫軸을 實數, 縱軸을 虛數로 하여 順序雙으로 표시되는데 이 · 표시법은 Hamilton(1805~65)이 고안하였으며 이 사실도 幾何가 代數學과 결합한 결과로 볼 수 있다. 이리하여 數의 완전한 體系가 확립되었다(圖 3). 그리고 陰數, 複素數 이외에 새로운 크기의 槪念으로서 「벡타」(vector), 「텐서」(tensor) 등이 출현하였다.

또한 여러가지 數學理論의 結合으로서, 解析幾何學, 微積分學, 複素函數論, 函數解析學 등 많은 분야가 탄생되었으며 數의 理論 자체도 解析的, 幾何的인 측면에서 再定立되었다.

요약하여 말한다면 數學은 幾何的인 側面에 속하는 連續性의 一般槪念과 算數的인 側面에 속하는 代數的 演算을 그 기반으로 하여 發達되었다고 볼 수 있다. 數學의 歷史에 관심있는 讀者는 Boyer(1968), Groza(1968) 등을 참조하기 바란다.

Jabr wa-al-muqabala"를 썼다. 이 册名에서 al-jabr는 等式에서 移項을 의미하고 al-muqabala는 兩邊에서 같은 項을 消去함을 의미한다. 오늘날 代數學을 의미하는 英文의 algebra는 여기서 유래되었으며 計算過程을 의미하는 algorithm이란 단어는 그의 이름에서 따온 것이다.

Ⅲ. 現行 教育課程의 分析과 提案

1. 數學教育의 目的

數學教育에서 教育目標, 教科課程, 教授方法 등은 항상 提起되는 問題로서 時代나 國家의 經濟·社會的 狀況에 따라 대답이 다를 것이다. 이러한 教育問題들은 모든 과목에서 教師와 學生들이 당면하는 基本問題이며 學父母 및 教育政策과 行政에 관련된 政治人, 行政官僚, 立法人들도 관심을 가져야 할 중요한 問題이다. 開發途上國家에서는 短期間의 成果를 기대하여 體系的인 硏究에 바탕을 두지 않은 行政主導의 教育制度改革과 指導가 教育을 歪曲시키는 事例가 많다. 우리나라의 경우에도 解放後 各級學校가 日帝時代의 教育課程을 답습하였고 그 이후 수차의 教科課程 改編에서도 國內實情에 대한 適合性을 충분히 硏究·檢討하지 않고 外國, 특히 日本의 教科課程을 模倣한 감이 적지 않았다.

科學의 教育에서 教科課程, 教授方法, 評價方法 등은 國家政策 優先順位와 政策目標 및 社會·經濟·文化的 制約條件을 반영하여야 한다. 그러나 과거에는 科目別 專門性과 經濟·社會的 構造變動에 대한 適合性이 體系的으로 고려되지 않은 가운데 일부 教育學者 중심으로 短期的이고 枝葉的인 몇가지 목적(예를 들면 學力考査)에 치중된 教育改編이 없지 않았다. 尖端化와 國際化가 급속히 진전되고 있는 오늘날 技術隔差의 問題는 先進國이든 開發途上國이든, 큰 국가이든 작은 국가이든, 부유한 국가이든 빈곤한 국가이든 모든 國家가 인식하고 있으며, 이에 科學教育 특히 數學教育은 막중한 비중을 차지하고 있다. 더욱 現代社會가 體系化·情報化·自動化됨에 따라 生活數學의 필요성도 증가하고 있는 실정이다.

그러므로 數學教育의 目標에서는 實用的인 側面이 強調되어 教科內容에 現實的인 要求가 반영되어야 한다. 第5次 高等學校 數學科 教育課程 改正案[11]의 教科目標에서도 다음의 實用的인 側面이 強調되어 있다. "數學의 基本的인 知識을 가지게 하고, 數學的으로 思考하는 能力을 기르게 하며, 이를 活用하여 創意的으로 問題를 解決할 수 있게 한다." 이 前文에 덧붙여 다음과 같이 언급하고 있다. "첫째, 數學의 基本的인 槪念, 原理, 法則과 이들 사이의 關係를 이해하게 한다. 둘째, 數學的 事實을 간결하고 명확하게 표현할 수 있게 하고 여러가지 現象을 數學的으로 思考하고 處理할 수 있는 能力을 기르게 한다. 세째, 數學에 대한 興味와 關心을 지속적으로 가지게 하며 數學的 知識과 機能을 體系化하고 이를 활용하여 合理的으로 問題를 解決하는 태도를 가지게 한다." 各級學校에서 教科目標에 부합하는 實用的인 數學教育을 실천하려면 教科課程의 改編이 불가피하며, 數學教育과 관련하여 社會의 現實的 要求를 파악하고 있는 각 분야의 專門家와 數學教育에 대한 問題意識을 지닌 數學者로 구성되는 專門家 集團이 장기적이고 깊이 있는 연구를 하여야 한다. 특히 이 集團에서 무엇을 가르쳐야 되는가를 계속 연구하여야 하며 어떻게 가르치는가의 問題는

11) 韓國教育開發院(1987) 참조.

教育學의 問題로서 다루어질 수 있는 것이다.

教科內容의 決定에 참고가 되는 數學史의 時代分類는 各級學校의 數學教科課程과 대응된다. 그리스時代 이전의 實用的·計算的 數學의 段階는 國民學校 課程에 해당되며, 그리스時代부터 17세기초에 이르는 初級理論的 數學時代는 論證的 數學의 段階로서 中學校 課程에 해당된다. 17세기초부터 19세기 前半에 이르는 解析學의 確立·發展時代는 基礎的 數學의 段階라 할 수 있으며 그 내용은 高等學校 課程에서 거의 다루어지고 있다. 19세기 前半 이후의 現代數學時代는 公理的 數學의 段階로서 大學이나 大學院의 數學講義에서 분야별로 다루어지고 있다. 여기서 특히 現代數學의 特徵을 언급할 필요가 있는데 이는 다음과 같이 말할 수 있다. 첫째, 數學의 理論과 應用에서 괄목할 만한 擴張이 일어났으며, 둘째 그 수많은 擴張이 일어났음에도 불구하고 새롭거나 더 높은 水準의 抽象化에 대한 一般概念이 形成되었으며, 세째 모든 분야에 集合論的 概念과 시스템的 思考方式이 지배하게 되었다는 사실이다. 그리고 여기에 덧붙인다면 數學의 主題가 量的關係뿐만이 아니라 모든 가능한 質的關係까지도 포함하게 되었다는 점이다. 이러한 특징들은 國民學校부터 高等學校에 이르는 全數學教育課程에도 파급되어 教科內容의 體系가 變化되었으며 앞으로 새로운 主題의 追加에 의하여 어떻게 그 體系가 變化되어야 하는가의 문제를 남기고 있다.

이상의 여러가지 사실들을 감안하여 數學教育課程을 편성하기 위해서는 다음과 같은 基本目標를 염두에 두어야 한다.

1) 數學은 內容上 累積性이 다른 학문보다 강하므로 概念, 方法 등이 體系的으로 構成되어 各級學校의 教科課程에 一貫性있게 配列되어야 한다.
2) 數學이 實生活과 밀접한 關係가 있음을 이해시키는 방향으로 例題, 問題 등의 構成과 水準을 平均的 學生의 知的發達段階 및 오늘날 급변하는 國內外的 生活環境에 맞추어야 한다.
3) 自然科學分野는 물론 社會科學分野에서 數學의 힘이 발견될 수 있도록 구성하여 오늘날 尖端化되어가는 모든 分野에 適用할 수 있도록 하여야 한다.

다음 節부터는 이와 같은 基本目標를 主眼點으로 하여 各級學校의 現行教科書를 살펴보기로 한다.

2. 國民學校의 算數

현재의 國民學校 數學教科書는 전체적으로 잘 구성되었다고 평가할 수 있다. 이는 상당히 많은 연구의 결과로써 이루어졌다고 추측되며 國民學校課程만 해도 數學者의 연구보다 教育學 측면의 비중이 크므로 教育大學 教授를 포함한 關係者들의 努力의 産物이라 評價할 수 있다. 이 과정에서는 數學의 抽象化가 그리 여러 단계로 이루어지지 않은 내용을 다루고 있으며 실질적인 生活數學이라 부를 수 있을 정도로 우리의 주변에서 흔히 볼 수 있는 대상을 주로 다루고 있다.

모든 학문에서도 공통적이지만 특히 數學에서는, 공부할 대상이 되는 對象物의 集合, 이 集合에 속하는 개개의 元素들에 대한 演算, 그리고 이 원소들간의 關係를 다루게 된다. 集合, 演算, 關係의 세 要素는 高等學校나 大學課程에서도 기본적으로 나타나며 代數 혹은

幾何를 막론하고 적용되는 必須的인 要素이다. 현행 國民學校 敎科課程 指針書에서는 내용상으로 數, 演算, 圖形, 測度, 關係로 분류하여 다루고 있으므로 기본적으로 集合(數와 圖形), 演算(演算, 測度), 關係의 세 要素와 일치한다고 볼 수 있다.

數에 대한 槪念은 國民學校 1학년 과정에서 自然數에 대하여 이름을 붙이는 命數法과 이를 기호로 표시하는 記數法을 두 자리 수까지 가르치고 있다. 그리고 이 自然數에 대한 四則演算(덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈)과 大小關係를 4학년 2학기까지 완전히 습득시키고 있다. 第Ⅱ章 第4節에서 다룬 有理數의 槪念은 2학년에서 소개되는 分數의 槪念으로서 시작되는데 이 개념은 나눗셈의 개념(어떤 것을 같은 크기의 n개로 나누는 개념)으로 설명하여 1/n의 표기법을 숙달시킨 후에 m/n (m<n)의 개념으로 유도하고 있으므로 효과적이라 생각된다. 十進分數인 小數는 현재는 3학년 2학기에 소개되고 있는데, 自然數의 十進記數法에서와 같이 小數의 표기가 다음과 같이 됨을 설명함이 十進位置的 記數法을 이해시킴에 도움이 되리라 생각된다.

$$354.78=3\times100+5\times10+4+7\times\frac{1}{10}+8\times\frac{1}{100}$$

그리고 23/100 등을 사용하지 않고 2/10+3/100 =2×1/10+3×1/100 으로 먼저 설명함이 바람직하다. 이와 같은 十進分數의 槪念을 확고히 파악시키기 위한 보조적인 이해로서 길이나 들이의 單位를 사용하면 효과적이다.

3.53m는 3(m) 5(dm) 3(cm) 를 의미함.

6354.783g은 6(kg) 3(hg) 5(데카g) 4(g) 7(dg) 8(g) 3(mg)을 의미함.

6354.783은 6(천)3(백) 5(십) 4( ). 7( ) 8( ) 3( ) 으로 읽음.

여기서 單位에 대하여 추가하여 언급하자면, 國民學校에서 배우는 單位의 名稱은 西洋에서 전래되어 왔기 때문에 많은 학생들이 혼동하기 쉬운 면이 있다. 따라서 명칭을 부여함에 있어서 미터법의 m, g, ℓ 등을 기준으로 하여 kilo(k, 1,000배), hecto(h, 100배), deca(10배), deci(d, 1/10배), centi(c,1/100배), milli(m, 1/1,000배)를 사용하는 방법을 설명함이 효과적이다.

第Ⅱ章에서 언급하였듯이 數와 圖形의 相互作用으로서 分數 혹은 小數의 槪念이 발생된 바 現行 敎科書에서 數直線으로 分數를 설명한 것은 매우 잘 구성되었다고 할 수 있다. 이 數直線의 槪念은 6학년 2학기에 나타나는 陰數의 이해에 매우 중요하며 실제로 6학년의 現行 敎科書에서 陰數의 槪念에 대한 설명은 매우 잘 되어 있다고 생각된다. 이리하여 有理數에서 陰의 分數를 제외한 나머지인 陽의 整數, 0, 陰의 整數, 陽의 分數가 모두 國民學校에서 다루어지고 中學校 1학년에서 모든 有理數의 이해가 완성된다. 分數 혹은 小數의 演算과 大小關係는 現行 敎科書에서 큰 무리가 없이 잘 구성되어 있다. 간혹 현대의 컴퓨터에 대한 지식을 조기 보급한다는 목적 아래에 二進法을 國民學校 課程에 도입하자고 주장하는 사람이 있으나 이는 進法을 다루는 中學校 課程에서 現行 敎科書를 수정하여 이해시킴이 바람직하다고 생각된다.

点, 直線, 平面圖形, 立體圖形에 대한 현행의 敎科課程은 매우 잘 구성되어 있으므로 언급하지 않는다. 數와 圖形을 기본으로 하여 실생활에 응용할 수 있는 여러가지 生活數學이

國民學校 課程에서 다루어지고 있는데 특히 여러가지 量에 대한 槪念과 이들의 測定이 중요한 비중을 차지하고 있다. 길이, 면적, 부피, 무게, 시간, 속력, 나이, 농도, 이율의 槪念과 測定方法이 全學年을 통하여 수준에 따라 잘 배열되어 있다고 생각된다.

여기까지는 算數에서 다루는 대상에 대하여 말하였지만 이를 종합적이며 체계적으로 사고할 수 있는 集合의 槪念에 대하여 말하고자 한다. 現行 敎科書에서는 4학년 1학기 과정에서 최초로 集合을 설명하고 있다. 集合의 槪念은 數學에서만의 槪念이 아니라 우리의 일상생활에서 항상 찾을 수 있는 一般的인 槪念이므로 4학년 학생 정도의 知的水準으로 충분히 이해가 갈 수 있으리라 생각이 된다. 우리의 일상생활에서 "무리", "다발", "떼", "일단" 등의 총체적으로 부르는 용어가 있고 더 나아가서 어떠한 特性을 가진 集團들이 존재하게 된다. 학교에서 4학년, 혹은 더욱 좁게 4학년 1반, 特別活動班으로서 學藝部, 蹴球部 등, 京畿道民 혹은 서울市民, 동물에서 포유류, 혹은 파충류 등 수많은 예를 들 수 있다. 특히 數의 集合에 대해서는 어느 정도 體系的으로 다루어야 하며 數의 大小關係, 數의 演算은 많은 학생이 기계적으로 수행할 수 있으므로 이들의 의미를 元素들의 關係, 元素들의 演算으로 생각하게끔 유도하여야 한다. 이것이 中學校부터 학습되는 性質을 위주로 하는 數學에서 중요한 思考方式이 되기 때문이다. 이러한 맥락에서 國民學校 전과정을 정돈하면 〈表 2〉와 같다. 이 표는 敎科課程에서의 數, 演算, 圖形, 測度, 關係의 다섯가지 부분을 橫軸으로는 다루고자 하는 對象의 集合과 이들의 演算 및 關係로 나누었고, 縱軸으로는 數, 圖形과 實生活에서의 여러 가지 應用分野로 나누어 정돈한 것이다.

컴퓨터에 대한 이해를 돕기 위하여 國民學校課程에서는 다음에 열거하는 몇가지를 감안함이 효과적이라 생각한다. 첫째, 6학년 2학기에 나오는 수판셈은 오늘날 많이 사용되지 않으므로 간단한 携帶用計算機(calculator)의 사용법을 소개하는 것으로 대치하고, 둘째 演算의 槪念을 이해시키기 위하여 入力→演算(혹은 處理)→出力(input→process→output)의 3段階로 표시하는 思考方式을 주입시킨다. 즉, $(2+5)\times3+5=26$의 예에서 다음과 같이

$(2;5)-\xrightarrow{+}7,\ (7;3)-\xrightarrow{\times}21,\ (21;5)-\xrightarrow{+}26$

혹은

$$2\xrightarrow{+5}\ 7\xrightarrow{\times3}\ 21\xrightarrow{+5}\ 26$$

등의 다이아그램으로 이해시키는 방법을 사용하여 演算(혹은 處理)의 遂行順序를 습득하게 한다. 이 방법은 2학년 2학기부터 설명되고 있는데 이를 계속 응용하면, 未知數를 포함하는 方程式에서 演算을 逆行시키는 方法에 의하여 답을 구할 수 있음을 보여주게 되며 論理的 思考方式의 初步的 訓練이 될 것이다. 예를 들면

$(\square+2)\times3+4=19$ 혹은 $(x+2)\times3+4=19$

는 다음과 같이 표시되며

$$(?)\xrightarrow{+2}(?)\xrightarrow{\times3}(?)\xrightarrow{+4}19$$

위 다이아그램에서 演算을 역행시키면 다음과 같이 되어

$$(3)\xleftarrow[-2]{}(5)\xleftarrow[\div3]{}(15)\xleftarrow[-4]{}19$$

최종의 3이 未知數의 값이 됨을 알게 된다. 여기서 이와 같은 방법이 代數的인 等式의 性質로써 方程式을 푸는 것이 아니라 演算의 性

〈表 2〉 國民學校 敎育課程

	集	合 (記號使用)	演算 혹은 計算 (記號使用)		關係 혹은 關係式 (記號 및 文字使用)		그래프 및 표
數	自然數	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (아라비아 숫자사용)	덧셈	+	等値關係(=)	5=3+2 7=x−4	數直線
	零(0)	0	뺄셈	−			
	큰 자연수표시	(十進位置的 記數法)	곱셈	×	大小關係(>, ≧, <, ≦) (不等關係)	5>3 $x+1 \leqq 3$	
	分數	$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{3}{100}$	나눗셈	÷	關係式	$y=x+1, y \geqq x+1$	直交座標 平面
	小數(十進分數)	$5\times10^1+3\times10^0+4\times10^{-1}+7\times10^{-2} \Rightarrow 53.47$	{자연수, 분수, 소수} + − × ÷ {자연수, 분수, 소수}		等式 {方程式, 恒等式}	$2x-1=x+1$ $2x=x+x$	順序雙 (x, y)
	陰의 整數	$5^-, 7^-$(陽의 整數 : 7^+)	{음의 정수}±{음의 정수}		不等式 {(條件)不等式, 絶對不等式}	$2x-5 \geqq x-3$ $2(x+1) \geqq 2x+1$	
			($\frac{2}{3}$와 $\frac{4.2}{0.4}$에서 "—"의 의미)				
圖形	점	점ㄱ, 점ㄴ					
	선(선분, 반직선, 직선)	선분 ㄱㄴ, 반직선 ㄷㄹ, 직선 ㅂㅅ, 삼각형 ㄱㄴㄷ, 사각형 ㄱㄴㄷㄹ	길이 및 거리계산		두 직선의 만남, 수직, 평행	{⊥, //, ≡, ∽} 중학교에서 사용	
	평면(다각형, 원, 부채꼴)		넓이 및 둘레계산		두 평면도형의 합동, 닮음		
	입체(육면체, 각뿔, 원뿔, 구, 각기둥, 원기둥, 회전체)		부피계산, 겉넓이계산(전개도)				겨냥도 확대도와 축도 작도법
			배율과 축적				
	각	각 ㄱㄴㄷ	각의 크기계산(각도기사용)				
實生活에서의 應用	단위사용과 측정 {길이 혹은 거리, 넓이, 부피, 무게, 시간, 각의 크기, 속력(시속, 분속, 초속), 나이, 날짜}	*km, m, cm, mm* km^2, m^2, cm^2, *ha a* km^3, m^3, cm^3, *kl, l, dl, t, kg, g, mg* 초, 분, 시간, 일 도(°) *km*/시, *m*/분, *m*/초 년, 월, 일	길이, 넓이, 부피계산 단위 환산 (시계, 저울, 자, 각도기, 달력의 사용법)		{식으로 나타내기 (방정식, 부등식), 응용문제 풀이법}	미지수 x	막대 그래프 그림 그래프 꺾은선그래프 띠 그래프, 사각형 그래프, 원 그래프 } 비율 그래프 히스토그램 돗수분포도
					정비례, 반비례 관계식	$y=5x$, $y=\frac{10}{x}$	
	비, 비율, 연비	5 : 4, 3 : 4 : 5	비의 값계산, 비례식, 비례배분		(속력)×(시간)=(거리)		
	농도(백분율)	%	농도계산		(소금물의 무게)×(농도) =(소금의 무게)		
	이율, 인구밀도	%, 할, 푼, 리, 인/km^2	이자, 원리합계 계산		(원금)×(이율) =(단위기간의 이자)		
	근사값과 오차		반올림, 올림, 내림, 최대의오차				
	경우의 수				초과, 이상, 미만, 이하의 관계	$1 \leqq x < 2$, $2 < x < 3$	관계식(대응 관계식)의 그래프
	자료의 정리 및 관찰		평균, 합계 계산				
	계산도구(수판, 계산기)		수판의 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈				
集合	일반집합 원소 수집합 도형의 집합	집합 가, { }의 사용 가={1, 2, 3} 1∈가	합집합, 교집합 전체집합, 여집합	∪, ∩	부분집합 집합의 상등	⊂ =	

質로써 方程式을 푸는 것임에 주의하여야 한다[12]. 이러한 演算의 順序와 그 逆行의 順序는 應用問題의 解決에 도움이 될 것이다. 더욱 이러한 演算(혹은 處理)의 順序는 高等學校 課程에 나오는 順序圖의 基礎概念에 해당된다. 세째, 數學的 文章의 참, 거짓을 알아내는 基礎論理의 訓練이 필요하다. 現行 教科書에서는 4학년 1학기에 두 페이지로 설명하고 그 이후 6학년까지 전혀 취급하지 않고 있는바 集合과 관련시켜 간간히 6학년까지 연습시킴이 바람직하다. 예로서, 集合 "가"={5,6,7,8}에서 元素를 뽑아 다음 式의 □에 넣었을 때 이 式이 참이 되는 元素의 集合 "나"를 구하는 問題를 들 수 있다.

$$10 < \square \times 2 < 15 \qquad \text{"나"} = \{6,7\}$$

일반적으로 참과 거짓의 판단은 ○, × 問題에서도 훈련되고 있지만 이러한 論理의 文章題에서는 뜻과 用語의 使用이 분명하게 표시되어야 한다. 특히 數學的 言語인 記號와 文字의 使用이 사람들 사이에 서로 약속된 言語임을 이해시켜 正確한 數學的 表示를 익히게 하고 應用問題에서 식을 세우는 데에 활용하게 함이 매우 중요하다.

確率과 統計에 해당하는 國民學校課程의 내용으로는 6학년 2학기에 다루는 경우의 수와 3학년 2학기부터 6학년 1학기까지 나오는 여러 가지 표와 그래프(막대 그래프, 꺾은선 그래프, 띠 그래프, 사각형 그래프, 원 그래프, 도수분포표, 히스토그램)를 통한 資料의 整理와 表示方法을 들 수 있다.

確率과 統計의 概念은 생활 속에서 항상 부딪치는 概念으로서 國民學校까지가 義務教育인 우리나라에서는 그 내용을 조금 더 보완할 필요가 있다고 생각된다. 이러한 현상은 컴퓨터의 教育과 마찬가지로 세계적인 경향이다. 이 두 분야의 教育課程은 國民學校의 教科內容이 바뀜에 따라 中學校, 高等學校에서도 달라져야 하므로 결국 各級學校의 教科課程을 體系的으로 연구해야 할 것이다.

確率과 統計의 教育에서는 대체로 다음의 몇가지를 고려하여야 한다. 첫째, 1+1이 2가 되는 必然的인 境遇와 달리 偶然性이 內包되는 境遇가 세상에 많이 존재한다는 사실을 학생들에게 이해시켜야 한다. 偶然性의 境遇는 여러 가지 게임들, 휴일에 기대하는 좋은 날씨, 시간에 맞추어 등교하는 일 등에서 아이들이 찾아볼 수 있다. 言語上으로도 "적당하다", "괜찮다", "만족하다" 등의 말은 絶對性을 갖지 않고 대략 어떠한 基準에 준하여 사용됨을 알 수 있는데 이러한 말 이외로는 표현할 수 없는 경우가 많기 때문이다. "사과 한 개와 사과 한 개를 더하면 사과 두개가 된다." 라는 말조차도 "1+1=2"로써 표시하고 있지만 엄밀히 말하자면 정확히 동일한 두 개의 사과는 존재할 수 없으므로 "근사" 혹은 "대강" 의 의미가 내포되어 사용되는 말인 것이다.

둘째, 國民學校에서 測度의 분야로서 여러 가지를 다루고 있지만 실생활에서는 많은 誤差가 發生할 수 있음을 이해시켜야 한다. 따라서 근사값의 표시가 다루어지며 더 나아가서 事前的인 測度로서, 確率이 事後的인 測度로서, 統計가 사용됨을 알아야 한다. 예를 들면 앞

12) 高等學校에서는 數의 演算으로서 +, ×만을 생각한다. −, ÷는 演算으로서 취급되지 않으므로 演算으로도 불리어지지 않는다. 예를 들면 5−3은 5+(−3)으로 표시되어 3에 대한 + 演算의 逆元인 −3이 5와 + 演算되는 것으로 해석된다.

뒤가 균형잡힌 동전던지기에서 事前的으로 앞과 뒤가 나오는 경우의 수가 같다고 알지만 불균형의 동전인 경우는 어떤 주어진 回數만큼 던진 實驗의 結果로써 그 경우의 수를 推測하게 된다.

세째, 事物을 比較·分析하는 判斷의 能力을 기르도록 하기 위하여 集合과 밀접한 關係가 있는 統計的 事件(events)의 槪念과 더불어, 단순히 길이나 면적을 재는 測度에서 벗어나서 일반적인 사물을 數量化하는 測度의 槪念을 소개함이 바람직하다. 模型을 만들어 實驗하고 그 結果를 整理하여 分析하는 등이 이에 해당하고 일상생활에서는 投票, 意識調査 등을 볼 수 있다.

위와 같은 고려사항들을 염두에 둔다면, 實驗의 結果를 整理, 解釋하는 것에 덧붙여, 實驗의 目的, 實驗의 方法 등을 강조하여야 하며 事前에 期待하거나 豫測했던 事實과 實驗 후에 얻어진 結果의 相異點에 대한 比較와 原因糾明에 중점을 두어야 할 것이다.

오늘날 情報化社會에 살고 있는 國民으로서는 確率과 統計에 대한 最小限의 常識을 갖추어야 하며 이 常識은 情報를 理解하며 活用하는 必須的인 道具로 사용될 것이다. 確率에 의한 일기예보가 적절한 예이며 더 나아가서 學科選擇, 進路選擇 등 우리 일상생활 속에서 意思決定을 내려야 하는 경우가 대부분임을 생각하면 情報와 統計의 중요함을 알 수 있다. 따라서 과거에는 高等學校 이상에서 다루었던 確率의 分野도 이제는 世界各國에서 國民學校 課程에 포함시키고 있으므로 이 부분에 한층 開發된 敎科課程이 필요하다고 생각된다.

3. 中學校의 數學

中學校 課程은 國民學校에서 숙달된 數와 이의 演算을 기본으로 하여 性質爲主의 數學的 思考力을 기르는 基礎過程에 해당된다. 이 과정에서 나타나는 중요한 特性으로서는 文字의 使用, 記號의 使用을 통하여 演算과 關係를 포함한 여러 가지 성질들을 다룬다는 사실을 들 수 있다. 여기에서 數集合은 陰의 整數, 有理數, 無理數까지 확대되어 모든 實數가 되며, 圖形은 國民學校에서의 直觀的인 平面圖形, 立體圖形의 觀察에서 탈피하여 證明을 요구하는 基礎的인 圖形의 性質을 다루게 된다. 이와 같은 성질을 위주로 한 數學的 思考力은 正確한 用語의 定義, 數學的 槪念, 數學的 法則의 이해와 아울러 文字 및 記號의 使用에 의한 正確한 數學的 表現을 통하여 개발되는 것이다. 그러나 現行 敎科課程의 내용은 數와 演算, 方程式과 不等式, 函數, 統計, 圖形으로 분류되어 있어 학생들이 혼동하기 쉽게 구성되어 있다고 할 수 있다. 그 주된 이유는 앞에서 언급한 세 要素중 演算과 關係의 두 要素가 混合되어 配列되었기 때문이다.

性質의 側面에서 數의 槪念을 파악시키고 초보적인 演算과 關係의 槪念을 이해시키기 위해서는, 現行 敎科書에서 비교적 잘 구성된 集合의 설명에 이어서 演算과 關係의 性質들을 어느 정도 深度있게 다루어야 할 것이다. 다시 말하면 현행의 方程式, 不等式, 函數 등은 關係式의 槪念으로 설명되어야 하는데 이를 위하여 二項關係의 槪念을 가르쳐야 한다. 中學生의 知能水準에 비추어 볼 때 짝짓기 및 親舊關係, 父子關係, 師弟關係 등 일상생활에서의 여러 關係들을 이해하고 있으므로 數를

떠나 任意의 集合에서의 二項關係도 학생들이 쉽게 이해하리라 생각된다. 國民學校 課程에서 나타나는 順序雙(ordered pair)은 集合곱(Cartesian product of sets)의 元素를 말하고 있고 二項關係가 이 集合곱의 部分集合으로 나타나는바 이를 쉽게 풀이하여 설명하면 된다[13]. 二項關係의 시각적인 표시로 順序雙의 그래프가 사용되며 이것이 直交座標를 사용하는 解析幾何의 기초적인 역할도 하게 되는 것이다. 현행 우리나라 敎科書에서는 다루지 않는 二項關係의 개념을 유럽의 여러 나라에서는 中學校에서부터 자세히 다루고 있다[14]. 敎科課程을 단계적으로 改正하기 위하여 中學校課程 關係式, 集合곱 혹은 順序雙을 통한 二項關係의 槪念으로부터 간단한 函數, 方程式과 不等式, 그리고 이들의 그래프를 설명하고 高等學校에서 二項關係 자체의 성질을 깊이 있게 다루는 것이 바람직한 것이다. 函數의 槪念도 현행 敎科書에서 다소 애매한 "對應"이란 말로 설명되고 있으나 위의 二項關係로써 설명하는 것이 훨씬 체계적이라 생각된다[15].

식의 표시는 文字, 數字, 演算記號로 이루어지는데, 文字가 未知數, 變數, 係數, 常數의 네 가지로 사용될 수 있음을 설명하여야 한다. 관례적으로 x, y, z 등이 未知數와 變數로 사용되고, a, b, c 등이 係數와 常數로 사용됨을 알 수 있다. 項, 次數, 單項式, 多項式, 一次式, 二次式 등의 명확한 定義를 제시함과 동시에 式의 演算을 훈련시켜야 한다. 이는 식의 표시가 數學的 言語에 해당되므로 그 文法에 해당되기 때문이다. 中學校에서 나타나는 數나 式에 대한 演算은 國民學校에서 배운 四則演算에서 크게 벗어나지 않기 때문에 數의 二項演算인 +,× 演算을 예로 하여 성질의 측면에서 이를 이해시켜야 한다. 二項演算의 槪念을 이해시키기 위해서는 國民學校의 곱셈표와 같이 한 集合 A 에서의 二項演算을 훈련시켜야 한다. 예를 들면 $A=\{△, □, ○\}$일 때 二項演算 ★이 다음과 같이 표로 주어지고 이 표에 의하여 演算을 하게끔 할 수 있다.

「右側元素」

「左側元素」 ★	△	□	○
△	△	□	○
□	□	○	△
○	○	△	□

(예) △★□=□
□★□=○
○★□=△

이러한 槪念이 任意의 元素에 대한 入力→演算(혹은 處理)→出力의 3단계 思考方式을 나타내고 있어서 모든 사물의 변화에 대한 이해에, 특히 컴퓨터의 이해에 도움이 될 것임을 다시 한번 말하여 둔다.

入力	→演算(혹은 處理)	→出力
$\{\frac{1}{2}\}$	+	3
△□	★	□
$\{\frac{H}{O}\}$	處理	H_2O(물)

二項演算의 중요한 성질로서 닫힘, 交換法則, 結合法則을 들 수 있고, 두 개의 二項演算(예

13) X에서 Y로의 二項關係 R은 집합곱 $X\times Y=\{(x, y) \mid x\in X, y\in Y\}$의 部分集合으로 표시되며, "$x$와 y가 R이라는 關係에 있다"는 數學的 表記로 $x\ R\ y$ 혹은 $y=xR$ 혹은 $y=R(x)$로 표시된다. 集合 X위의 二項關係는 집합곱 $X\times X$의 部分集合이 됨은 자명하다.

14) Servais and Varga(1971) 참조.

15) 集合X에서 集合 Y로의 函數 F는 X의 각 元素에 대하여 Y의 元素가 한개씩만 대응되는 二項關係를 의미하며 二項關係의 表示法들 중에서 $y=F(x)$의 형태로 많이 사용된다.

를 들면 實數에서 +, ×의 두 二項演算)에 대해서는 配分法則이 중요한 성질이 되는데, 現行 教科書에서는 이러한 성질들이 체계적으로 설명되어 있지 않아 학생들이 이해하기 어렵거나 대수롭지 않게 생각하는 원인이 된다. 더욱 二項演算에 의하여 정의되는 닫힘성, 恒等元, 逆元 등은 槪念上으로 확실히 이해되도록 설명하여야만 한다.

이와 같이 數와 式의 二項演算과 集合의 二項關係에 숙달되면 式=式, 式)式에 해당되는 方程式과 不等式의 분야가 쉽게 이해될 수 있다. 일반적으로 式의 關係에 대하여 다음과 같이 분류하며

等 式 ┌ 恒等式 ($5=2+3$, $2x=x+x$, $a+b=b+a$)
　　└ 方程式 ($3=x+2$, $2x-1=x+5$, $x+1=x-3x-7$)

不等式 ┌ 絶對不等式 ($5>3$, $x^2+x+1>0$, $x^2\geqq 0$, $a+b^2\geqq a$)
　　└ 條件不等式 ($3>x+2$, $2x-1\leqq x+5$, $x+1<x^2-3x-7$)

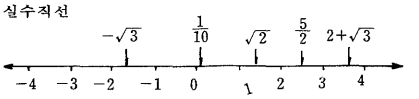
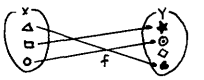
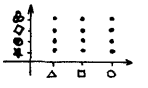
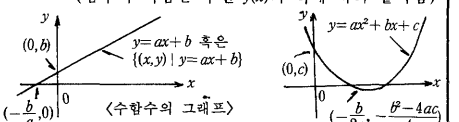
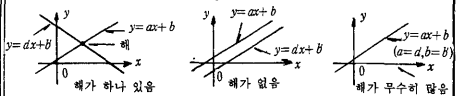
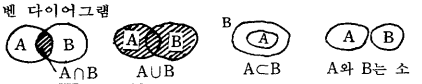
未知數 x 하나에 대한 等式과 不等式을 일반적으로 각각 方程式과 (條件)不等式이라 부르고 있다. 뒤의 高敎課程에서 언급하겠지만 이러한 方程式과 不等式은 $f(x)=g(x)$ 혹은 $f(x)>g(x)$로 표시되며 $f(x)$ 나 $g(x)$ 의 형태에 따라서 1次方程式 (1次不等式), 2次方程式 (2次不等式) 등으로 불리워진다. 方程式의 풀이는 앞절에서 말한 바와 같이 代數的인 逆演算의 方法으로 얻을 수 있으며 二項關係로써 일반적인 설명을 할 수 있다. 예를 들면 1次方程式 $3=2x+1$ 은 逆演算의 方法으로 $3-1=2x\rightarrow 2\times 1/2=2x\times 1/2\rightarrow 1=x$와 같이 풀이되는 반면, 實數集合 위의 二項關係를 나타내는 關係式 $y=2x+1$에서 $y=3$과 關係되는 x를 찾는 問題로 설명될 수 있는 것이다. 不等式의 경우도 마찬가지임은 쉽게 알 수 있다.

中學校의 圖形敎育에서는 國民學校 課程의 直觀的 圖形觀察에서 벗어나 推論的인 圖形의 性質을 다루게 된다. 圖形敎育의 目的으로 다음의 세 가지를 들 수 있다. 첫째, 平面과 空間에서 圖形에 대한 지식을 습득케 하고 둘째, 思考方式의 訓練으로, 演繹的 方法의 理解를 증진시키며 세째, 獨創的인 思考의 機會를 부여하는 것이다. 中學校에서는 첫째 목적에 중점을 두고 있으며 차츰 高學年이 될수록 둘째 목적으로 비중이 이동하여 궁극적으로는 세째 목적이 전체를 일관하는 가장 중요한 목적이 된다. 國民學校에서 길이, 면적, 부피의 測定을 학습한 후 中學校에서는 圖形의 作圖, 點, 線, 面들 사이에서 이루어지는 平行, 垂直, 만남, 일치 등의 關係들을 다루게 된다. 圖形의 測定에서도 근사값이 사용될 수밖에 없기 때문에, 앞에서 언급한 바와 같이 이것이 單位의 選擇問題와 결합하여 實數의 槪念, 實數의 連續性과 연관되고 統計分野에서의 不確實性, 不正確性 등의 槪念과 상통함을 알 수 있다.

圖形을 硏究하는 觀點으로서는 位相的 (topological), 物理的(physical), 變換的 (transformational), 벡타的(vectorial) 觀點들을 들 수 있다. 閉曲線, 開曲線, 連結狀態, 內部와 外部分離, 꼭지점과 모서리 및 면의 갯수 등은 位相的 觀點의 槪念들로서 현행 中學校 1학년 課程에서 다루고 있다. 길이, 넓이, 부피를 포함하여 合同, 닮음, 展開圖 등의 槪念들은 物理的 觀點의 槪念이다. 對稱性, 回轉, 平行移動 등은 剛體運動에서 볼 수 있는 變換的 觀點의 槪念이며 더 나아가서 종이로 물건

〈表 3〉 中學校 數學課程

	집 합	(기호사용)	연 산	(기호사용)
수(數)	자연수(양의 정수) 십진위치적 기수법	기수법(10진법, 5진법, 2진법) $653=6\times10^2+5\times10^1+3$ $1423_{(5)}=1\times5^3+4\times5^2+2\times5^1+3$ $1101_{(2)}=1\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1$	5진법, 2진법에서의 +, −연산 {정수, 유리수, 무리수} {+, −, ×, ÷} {정수, 유리수, 무리수} 이항연산 음수의 사칙연산	
	정수(양의 정수, 0, 음의 정수) 유리수(분모와 분자가 정수인 분수) 유한소수 및 순환소수	-1, -653("−"부호 사용) $\frac{n}{m}$ (m, n은 정수)		
	무리수(분모와 분자가 정수인 분수로 표시 못하는 수) 순환하지 않는 무한소수	$553.47=5\cdot10^2+5\cdot10^1+3\cdot10^0+4\cdot10^{-1}+7\cdot10^{-2}$ $2.\dot{3}\dot{0}\dot{7}$, $1.4\dot{2}\dot{3}\dot{5}$	분수의 소수표시 순환소수의 분수표시	$2.\dot{3}\dot{0}\dot{7}=\frac{2305}{999}$
	실수 ⊃ 유리수 ⊃ 정수 ⊃ 양의 정수(자연수) : 1, 2, … 0 (영) 음의 정수 : $-1, -2, \cdots$ 분수 : $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{3}{10}$ 무리수 : $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π	$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{2}$	무리수의 소수표시 {제곱근표, √ 계산법}	
			분모의 유리화	$\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$
			실수의 연산에 대한 성질 {교환법칙, 결합법칙, 분배법칙}	
	근사값, 오차의 한계, 유효숫자	$314.1590=3.141590\times10^2$ $0.0003141590=3.141590\times10^{-4}$	근사값의 사칙연산	
식(式)	식(문자와 숫자가 연산부호로 연결되어 표시된것) 항, 인수, 차수, 공통인수 지수, 밑, 계수, 상수, 미지수, 변수	문자의 사용 {계수 및 상수 : a, b, c, … 미지수 및 변수 : x, y, z, … 정수 : n, m, …}	식의 계산(동류항의 정리) {단항식, 다항식} {+, −, ×, ÷} {단항식, 다항식}	
	단항식, 다항식 상수항, 일차항, 이차항,	지수의 사용 : 5^2, a^3, x^5, b^n × 부호의 생략 : $a\times b\to ab$ ÷ 부호의 분수표시 : $a\div b\to\frac{a}{b}$	곱셈공식 : 단항식⟶다항식 인수분해 : 다항식⟶단항식 (2차3차항식의 인수분해)	
	문자 x에 관한 식(일차식, 이차식) 문자 x, y에 관한 일차식 (x, y는 변수)	$ax+b$, ax^2+bx+c $ax+by+c$	2차방정식의 근의 공식	
집합(集合)	(일반)집합 원소, 무한집합, 유한집합, 원소의갯수 집합표시법(원소나열법, 조건제시법) 공집합, 변수, 상수, 변역	A, B, C, X, Y(집합) a, b, c, x, y (원소) $a\in A$, $b\notin B$, $n(A)$ $\{a, b, c\}$, $\{x \mid p(x)\}$, ϕ	합집합 교집합 차집합 전체집합(U)과 여집합	$A\cup B$ $A\cap B$ $A-B=A\cap B^c$ $U-A=A^c$
	수집합 ⊃ 유리수집합 ⊃ 정수집합 ⊃ 자연수집합 {0} 음의 정수집합 분수집합 무리수집합		집합의 원소갯수 계산 $n(A\cup B)$, $n(A\cap B)$, $n(A^c)$	
	순서쌍의 집합(집합곱)	$X\times Y=\{(x, y) \mid x\in X, y\in Y\}$ $A\times B=\{(x, y) \mid x\in A, y\in B\}$		
	집합의 응용(경우의 수, 확률)		$n(A)+n(B)$, $n(A)\cdot n(B)$, $\frac{n(A)}{n(U)}$	
통계(統計)	자료의 정리와 관찰 변량 계급, 계급의 크기, 계급값	x_i, f_i, $N=f_1+f_2+\cdots+f_n$ (첨자의 사용)	돗수, 상대돗수, 누적돗수의 계산	
	확률 경우의 수, 사건	사건의 집합표기	확률과 기대값의 계산	
	자료의 비교 대표값(평균) 산포도(표준편차, 분산)		평균의 계산(가평균 사용) 분산, 표준편차의 계산	M S^2, S
도형(圖形)	기본요소 : 점, 선(직선, 반직선, 선분), 평면, 각	점 A, 점 P, $\overleftrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overline{AB}$	각의 단위(도, 분, 초)	10°, 30′, 50″
	평면도형 : 다각형, 정다각형, 원, 부채꼴 (원주율, 중심각, 내각, 외각, 꼭지점, 변)	직선 l, $\angle AOB$, $\overline{\Delta}ABC$, □EFGH, π	넓이 계산, 둘레 계산, 내각의 합, 외각의 합, 대각선의 수	
	입체도형 : 다면체, 정다면체, 다각뿔, 다각뿔대 (면, 모서리, 꼭지점, 밑면, 윗면) 회전체(원뿔, 원뿔대, 구)		다면체의 모서리 수, 꼭지점 수 부피 계산, 겉넓이 계산 원주각과 호의 길이 계산 닮은 도형의 면적과 부피계산	
	도형의 관찰 : 선형도형, 연결상태, 단일폐곡선, 면		오일러의 공식(수형도, 선형도형, 다면체)	
	삼 각 비 : 사인, 코사인, 탄젠트	sinA, cos A, tan A	sin 30°, sin 45°, sin 60°, sin 90° sin 0°, 삼각비의 표읽기 삼각비의 응용(거리재기)	
논리	명제, 가정, 결론, 참과 거짓 용어의 정의 정리와 증명 증명방법(직접증명법, 간접증명법)	$p\to q$		

관계 혹은 관계식	(기호 사용)	그래프 및 표
등치관계(=) 대소관계(>, ≧, <, ≦) 이항관계 함수	$10=7+3,\ a+3=4$ $5>3,\ x+1\leqq 3$ $x\neq 4$ $0.\dot{9}=1$ $1<\sqrt{2}<2$ $1.414<\sqrt{2}<1.415$	• 실수직선  • 집합 X에서 집합 Y로의 함수 $f: X\to Y$ 대응관계 f 
서로 다른 두 수 사이에 항상 수가 존재	$a<b\Rightarrow a<\frac{a+b}{2}<b$	• 집합곱 $X\times Y=\{(△,★),(△,⊙),(△,◇),(△,♣),$ $(□,★),(□,⊙),(□,◇),(□,♣),$ $(○,★),(○,⊙),(○,◇),(○,♣)\}$ $=\{(x,y)\mid x\in X, y\in Y\}$ 순서쌍의 집합  X×Y의 그래프
참값의 범위	근사값이 314.1590일 때 근사값 a의 범위는 $314.15895\leqq a<314.15905$	• 실수집합 R의 집합곱 $R\times R$=직교좌표 평면상의 모든 점들의 집합(실수 순서쌍의 집합) $=\{(x,y)\mid x, y$는 실수$\}$ 유한집합 : (예) 주사위를 두번 던지는 경우의 순서쌍의 집합 • 실수집합 R에서 실수집합 R로의 함수는 그림으로 보다는 대응관계식으로 주어진다. $y=f(x)$ 일차함수 $y=ax+b$ 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ (함수의 이름은 우변 $f(x)$의 식에 따라 붙여짐) 
등식의 성질 (식=식) 부등식의 성질 (식<식, 식≦식) 좌변 우변, 양변 이항, 양변에서 약분 미지수 x에 대한 식의 관계 등식(식=식)—방정식, 항등식 부등식(식≦식, 식<식)—(조건)부등식, 절대부등식 연립방정식(미지수가 2개 이상)	$a=b\Rightarrow a\pm c=b\pm c$ $ac=bc$ $a/c=b/c\ (c\neq 0)$ $a<b\Rightarrow a\pm c<b\pm c$ $ac<bc,\ a/c<b/c\ (c>0)$ $ac>bc,\ a/c>b/c\ (c<0)$ $ax+b=0$ 혹은 $ax+b=a'x+b'$ (일차방정식) $ax^2+bx+c=0$ 혹은 $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$ (이차방정식) $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ dx+ey+f=0 \end{cases}$	• 두 대응관계식 $y=ax+b, y=a'x+b'$를 동시에 만족하는 순서쌍을 연립방정식 $\begin{cases} y=ax+b \\ y=a'x+b' \end{cases}$의 해라 부른다.  • 벤 다이어그램 
집합의 상등 부분집합(A가 B를 포함한다) 서로 소 두 집합의 대응관계 변수, 상수의 개념 변역, 정의역, 공역, 치역 주사위 눈의 전체집합 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$ 홀수 눈의 집합 $A=\{1,3,5\}$	$A=B\leftrightarrow A\subset B$이고 $B\subset A$ $B\subset A$ A와 B는 서로소 $A\cap B=\phi$ $\neq$, $\not\subset$ 홀수가 나올 확률$=\frac{n(A)}{n(U)}=\frac{1}{2}$	
돗수, 상대돗수, 누적돗수 사건과 확률의 대응관계 두 변량의 관계(상관관계)		• 돗수분포표, 히스토그램, 돗수분포다각형, 돗수분포곡선 • 상대돗수분포표, 상대돗수분포다각형 누적돗수분포표, 누적돗수분포다각형 • 사건과 벤다이어그램 • 상관도, 상관표
직선과 직선의 관계(평행, 수직, 일치) 직선과 평면의 관계(평행, 수직, 포함) 원과 직선의 관계(현, 접선) 다각형과 다각형의 관계(합동, 닮은꼴) 다각형과 원의 관계(내접, 외접) 원과 원의 관계 (중심선, 공통현, 공통접선) 다각형의 성질 (삼각형의 성질, 피타고라스정리) 동위각, 엇각, 맞꼭지각의 관계 원에서의 비례관계 삼각비와 직각삼각형 여각의 삼각비 세삼각비 사이의 관계	$/\!/$, $\perp$ $\equiv$, ∞ $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$, $\sin^2 A+\cos^2 A=1$	• 작도 수선, 각의 이등분선, 수직이등분선, 접선 삼각형의 작도(삼각형의 결정조건) 선분의 비례분할 외접원, 내접원 작도 • 한붓그리기, 수형도

을 포장하던가 벽지를 바를 때 나타나는 접힘, 휨, 자름 등도 變換的 觀點의 概念으로서 點들의 函數關係로 대치될 수 있다. 끝으로 벡타的 觀點은 平面 혹은 空間에서 點의 位置를 나타내는 直交座標에 의한 것인데 解析幾何의 基本이 된다. 위의 네 가지 觀點에서 규정되는 여러 概念들은 서로 독립적인 것이 아니라 대부분 중복돼 있으므로 학생들로 하여금 다각도로 사고할 수 있는 능력을 개발시켜야 한다.

推論的인 圖形의 性質은 定義, 命題, 定理, 證明 등의 정확한 概念과 方法을 사용하여 공부하게 되는데 現行 敎科書의 水準이 적당하다고 생각이 된다. 直接證明法에 해당되는 演繹的 思考方式과 間接證明法에 해당되는 歸謬法은 證明方法에서 매우 중요한 위치에 있으므로 圖形의 性質證明을 통하여 철저히 훈련되어야 한다. 추후 高等學校나 大學校 課程의 代數學, 幾何學, 解析學 등 모든 분야에 활용된다. 그러나 選多型 위주의 試驗問題가 이러한 훈련에 상당한 장애가 되고 있다는 사실을 지적하지 않을 수 없다.

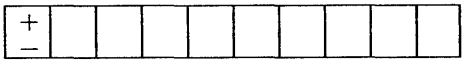
現行 中學校의 確率, 統計分野는 그 내용이 조금 미흡하다고 생각이 된다. 中學校 數學課程 改正案에 의하면 中學校 2학년의 資料의 比較와 中學校 3학년의 確率이 바뀌어진 사실만 現行過程과 다를 뿐이다. 前節에서도 언급하였지만 確率의 基礎概念이 國民學校 課程에 나타나는 것이 현재의 세계적인 추세이지만 이를 감안하지 않더라도 中學校에서는 어느 정도 體系的인 確率의 概念을 인식시킬 수 있다. 中學校 1학년에서 集合의 演算과 函數의 概念을 배웠으므로 2학년에서의 確率은 당연히 集合과 函數의 概念으로 설명되어야 한다. 이를 위해서는 集合 自體를 元素로 갖는 集合, 즉 集合들의 集合을 다루어야 하나 이를 피하고도 確率의 說明이 가능하다. 같은 確率을 갖는 元素들의 有限集合(예를 들어 동전, 주사위, 카드뽑기)으로 制限한다면 集合의 각 元素들이 최소단위의 事件이 되므로 確率計算이 용이해지기 때문이다. 이 정도의 수준이 中學校에서 숙달되면 順列과 組合을 공부하는 高等學校에서 여러 가지 多樣한 事件을 다룰 수 있도록 심화될 수 있으며 더 나아가 集合과 函數의 概念下에서 連續確率分布의 概念으로 확장될 수 있는 것이다.

國民學校에서 다루는 여러 가지 表와 그래프를 이용한 資料의 整理와 表示方法에서 더 나아가 中學校에서는 초보적인 資料의 比較 및 分析을 다루게 된다. 도수분포표, 히스토그램, 대표값, 散布度, 相關關係 등을 다루고 있는데 이러한 계산 위주의 統計뿐만이 아니라 前節에서 언급한 國民學校에서의 確率과 統計의 敎育目的을 더욱 심화시켜 統計的 實驗의 目的, 標本抽出의 目的 등을 소개함이 바람직하다. 결국 統計學의 두 분류인 記述統計學과 推論統計學中 記述統計學의 전부와 推論統計學의 기본이 되는 確率과 標本抽出의 초보적인 概念이 中學校課程에서 설명돼야 한다.

컴퓨터가 數를 기억하는 原理는 中學校 2학년 수준에서 지도할 수 있다고 생각된다. 현행 中學校 1학년에서 나오는 記數法에서 二進數의 演算을 배우고 2학년의 確率分野에서 境遇의 數를 배운다면 주어진 길이의 二進數[16]가 얼마나 큰 整數까지 表示可能한지를 학생들이 알 수 있게 된다. 예를 들어 다음의 그

16) 컴퓨터에서 사용되는 二進數를 bit(binary digit)라 부르며, 數를 表示함에 사용되는 bit수효는 컴퓨터 機種에 따라 다르다.

림과 같이 10개의 칸이 주어지고, 陰數와 陽數를 구분하기 위하여 좌측 첫칸을 사용한다면, -2^9부터 $+2^9$까지의 整數를 이로써 나타낼수 있다.



(+는 0으로, −는 1로 표시)

이러한 整數의 位置的 表示法에 덧붙여 有效數字 表示法을 二進數에 응용하면 實數(정확히 有理數)의 표시도 가능하며 이들이 컴퓨터의 數字 表示法이 된다. 實數의 表示法이 中學校에서 혹은 高等學校에서 다루어야 하는지의 문제는 더 연구하여서 결정할 문제이지만 적어도 中學校 2~3학년 수준에서 교육가능한 주제임을 밝혀 둔다. 더욱 初·中·高等學校에서의 컴퓨터敎育이 실시될 예정이므로 數學에서 컴퓨터의 基礎原理를 敎育함이 매우 중요하다.

이상의 내용을 集合, 演算, 關係의 세 要素로 구분하여 요약하면 〈表 3〉과 같다.

4. 高等學校의 數學

第1節에서 인용된 高等學校 數學科 敎科目標는 國民學校와 中學校의 것과 거의 동일하며 이 문장들 중에서 數學的 知識과 機能의 體系化라는 말은 敎科課程에서 가장 중요한 의미를 내포하고 있다. 知識의 習得도 체계적으로, 數學的 思考와 表現에 해당되는 機能도 체계적으로, 問題解決도 체계적으로 한다는 의미이다. "體系化"와 관련하여 數學의 構造的 方法이 언급되어야 할 것이다. 數學的 構造는 代數構造, 順序構造, 位相構造로 나누어 볼 수 있으며 이 세 가지 構造는 서로 聯關 혹은 混合되어 설명된다. 예를 들면 實數의 集合이, 덧셈과 곱셈의 演算에 의해 정의되는 代數構造, 大小關係를 나타내는 順序構造, 極限의 槪念으로 나타나는 位相構造를 가지고 있고 이들 構造들이 서로 聯關되어 있다. 이와 같은 "體系的", "構造的" 이란 말을 이해하는 基本知識이 여러번 강조해 온 集合, 演算, 關係의 세 要素들이다. 이들에 대한 분명한 이해를 학생들이 하게 된다면 數學的 思考와 問題의 解決에 큰 어려움이 없어지고 數學을 어려운 科目으로 인식하는 것에서 어느 정도 탈피되리라 생각된다.

高等學校 數學敎科課程은 大學入試에서의 比重 때문에 대다수 학부모들이 깊은 관심을 가지고 있으며 또한 여러 분야의 專門人으로서 사회에 진출하는 학생들에게도 많은 영향을 주게 된다. 現行 敎科書의 내용을 종합적으로 評價한다면 같은 줄기의 주제가 中學校 課程과 마찬가지로 산만하게 배열되어 있다. 다시 말하여 集合, 演算, 關係의 세 要素를 기반으로 체계적으로 구성되어 있지 않아 학생들이 數學을 어렵게 느끼는 원인이 되고 있다. 쉽게 말한다면, 서울시 地域을 공부할 때 地圖보는 법과 幹線道路만을 외히면 高等學生의 知能水準으로 웬만한 골목길까지 찾아갈 수 있듯이, 技巧的인 어려운 問題 혹은 복잡한 計算問題 등에 해당하는 서울시의 모든 골목길을 학생들이 다니게 할 필요는 없다. 여기서 數學的 知識·機能의 體系化와 活用이 地圖를 보는 法과 幹線道路의 熟知에 비유된다.

高校課程에서 다루는 주제는 中學課程의 내용이 深化 또는 一般化된 것과 새로이 추가되는 主題로 構成된다. 數(複素數로 擴張), 式,

平面圖形, 立體圖形 및 一般的集合이 심화된 주제이며 二項演算과 二項關係는 數集合에서 任意의 集合에 관한 설명으로 一般化된 주제이다. 새로이 추가되는 主題는 解析學의 微積分과 超越函數, 幾何의 空間座標, 벡타, 二次曲線, 代數學의 數列과 行列, 確率·統計의 順列, 組合, 推定, 檢定 등이다. 이러한 일반화된 여러 주제를 체계적으로 구성함에 있어서도 集合, 演算, 關係의 세 要素로 조직화함이 中學課程과 다를 바 없다. 그러나 高校課程에서는 특히 가르치는 주제의 순서에 주의를 기울여야 한다. 지금부터는 現行 教科課程을 분석하기보다는, 筆者가 現行 課程을 최대한 감안하여 〈表 4〉에 提案한 內容을 중심으로 설명하고자 한다.

〈表 4〉의 내용에서 集合과 論理(Ⅰ), 數의 演算과 關係(Ⅱ), 二項演算과 二項關係(Ⅲ)는 가장 必須的인 主題이다. (Ⅰ)에서의 集合은 中學校 1학년에서 다룬 내용을 복습하고 이를 一般的인 集合으로 擴張시켜 다루면 되므로 자세한 언급을 피하고 論理에 관하여 몇 가지 말하고자 한다. 과거에는 학생들에게 論理的 思考方式을 訓練시키기 위하여 論理를 가르쳐 왔다고 볼 수 있으며 특히 公理的 數學인 유클리드 幾何學을 통하여 論理的 思考를 훈련시켰다. 여기서 論理的 構造를 갖지 않는 참된 數學이 없다고 하는 것이 사실이지만 많은 數學의 내용들이 直觀的, 歸納的 方法들과 例題, 應用事例를 통하여 교육되어 온 사실도 간과되어서는 안된다. 아뭏든 高校課程에서는 數學이 論理的으로 정돈되어야 하며, 이것이 數學의 構造的 이해와 함께 體系的인 學習의 基本이 된다.

論理教育은 順序(order)에 관한 論理的 關係로 시작된다. 어린이도 알 수 있는, 신발과 양말을 착용하는 순서로부터 여러 가지 게임들, 더 나아가 回路設計에 이르는 時間的, 空間的 順序問題들에서 찾을 수 있다. 다음 段階에서는 集合과 二項關係의 概念을 통하여 論理에 대한 先入觀이 形成되고 나서 命題, 命題의 合成, 限定記號(quantifier) 등의 表現을 통하여 論理의 概念이 분명해지게 된다. 이러한 段階的 發展은 幼稚園에서부터 高等學校에 이르는 학생들의 精神教育學的인 發達과 일치된다고 생각된다.

과거에는 數學의 命題가 다음과 같이 假設的 形態(hypothetical form)나 斷言的 形態(categorical form)로 서술되어 왔다.

(假設的 形態) "어떤 三角形이 二等邊三角形이라면 그 三角形의 두 밑각은 같다"

(斷言的 形態) "모든 二等邊三角形은 同一한 두 밑각을 갖는다"

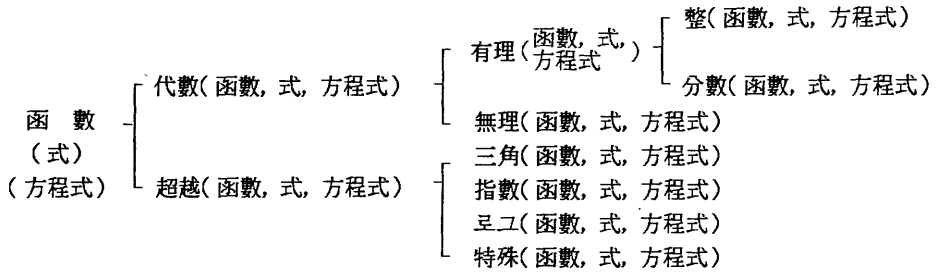
학생들은 斷言的 形態의 命題를 이해함에 곤란을 겪게 되는데, 그 이유는 單純命題와 合成命題의 구별에서 일어난다. 예를 들면, "삼각형의 세 내각의 합은 180도이다." 라는 斷言的 形態의 命題를 "도형이 $\triangle ABC$이면 $\angle A+\angle B+\angle C=180$이다." 라는 合成命題로 사고하는 습관을 익혀야 하며, "모든 이등변삼각형은 동일한 두 밑각을 갖는다." 라는 위의 斷言的 形態의 命題도 "$\triangle ABC$에서 $AB=AC$이면 $\angle B=\angle C$이다."라는 合成命題로 변형하여 이해돼야 한다. 그리고 命題函數와 限定記號의 使用은 여러 定理의 證明에 필수적이므로 高校課程에 포함되어야 할 것이다. 더욱 이들은 다른 주제에서와 마찬가지로 학생들에게 集合을 통하여 이해시키는 것이 효과적이라 생각된다. 이와

〈表 4〉 高等學校 數學科 敎育課程(案)

Ⅰ. 집합과 논리
1. 집합
§1. 집합
§2. 집합의 연산과 관계
2. 논리
§1. 명제와 명제의 합성
§2.*조건명제와 한정기호의 사용
§3. 명제의 상호관계
§4. 증명법
Ⅱ. 수와 식
1. 실수 체계
§1. 실수의 분류
§2. 실수의 연산
§3. 실수의 대소관계
2. 복소수 체계
§1. 복소수
§2. 복소수의 연산
3. 식
§1. 식의 분류
§2. 식의 연산과 관계
Ⅲ. 이항연산과 이항관계
1. 이항연산
§1. 집합과 이항연산
§2. 이항연산의 성질
§3. 항등원과 역원
2. 이항관계
§1. 집합곱과 이항관계
§2. 이항관계의 성질
§3. 역관계와 합성관계
3.*군과 체
§1. 집합과 체계
§2. 군
§3. 체
4. 함수관계
§1. 함수
§2. 역함수
§3. 합성함수
§4. 실수함수의 분류
Ⅳ. 등식과 부등식
1. 등식과 부등식의 분류
§1. 방정식과 항등식
§2. 조건부등식과 절대부등식
2. 일차방정식과 일차부등식
§1. 일차방정식의 해법
§2. 일차부등식의 해법
3. 이차방정식과 이차부등식
§1. 이차방정식의 해법
§2. 이차방정식의 판별식
§3. 근과 계수와의 관계
§4. 이차부등식의 해법
4. 고차방정식과 고차부등식
§1. 삼차방정식의 해법
§2. 간단한 사차방정식
§3. 인수분해가 되는 고차부등식
5. 분수방정식과 분수부등식
§1. 분수방정식의 해법
§2. 분수부등식의 해법
6. 무리방정식과 무리부등식
§1. 무리방정식의 해법
§2. 무리부등식의 해법
7. 연립방정식
§1. 일차연립방정식의 해법
§2. 이원이차연립방정식
8. 절대부등식
§1. 여러가지 절대부등식
§2. 이차방정식과 절대부등식
Ⅴ. 평면도형의 관계식과 그래프
1. 직선의 관계식
§1. 일차함수의 그래프
§2. 일차방정식과 그래프
2. 이차곡선의 관계식
§1. 이차함수의 그래프
§2. 이차방정식과 그래프
§3. 포물선의 관계식
§4. 원의 관계식
§5. 타원의 관계식
§6. 쌍곡선의 관계식
3. 도형의 이동
§1. 평행이동
§2. 대칭이동
4. 연립방정식과 연립부등식의 그래프 해법
§1. 연립일차방정식의 그래프해법
§2. 연립일차부등식의 그래프해법
§3. 부등식과 영역
5. 최대·최소 문제
§1. 한 변수 함수의 최대최소
§2.*두 변수 함수의 최대최소
Ⅵ. 초월함수
1. 삼각함수
§1. 일반각과 삼각함수
§2. 삼각함수의 그래프
§3. 삼각함수의 성질
§4. 삼각함수와 삼각형
§5. 삼각방정식과 삼각부등식
§6. 삼각함수와 복소수
2. 지수함수
§1. 지수의 확장
§2. 지수함수의 그래프
§3. 지수함수의 성질
§4. 지수방정식과 지수부등식
3. 로그함수
§1. 로그의 성질
§2. 로그함수의 그래프
§3. 로그함수의 성질
§4. 로그방정식과 로그부등식
§5. 상용로그와 자연로그
Ⅶ. 공간도형의 관계식
1. 공간도형
§1. 직선과 평면
§2. 직선과 평면의 관계
2. 공간좌표
§1. 공간의 점의 좌표
§2. 직선의 관계식
§3. 평면의 관계식
§4. 구면의 관계식
§5. 삼원일차방정식과 평면
Ⅷ. 벡터
1. 벡터공간
§1.*벡터공간의 뜻
§2.*성분벡터
§3.*벡터공간의 차원과 기
§4. 복소수 및 정식과 벡터
2. 벡터의 내적
§1. 내적
§2. 내적의 성질
3. 벡터와 도형의 관계식
§1. 직선의 벡터표시
§2. 평면의 벡터표시
§3. 기타 도형의 벡터표시
Ⅸ. 행렬
1. 벡터의 변환
§1. 평면벡터의 변환
§2. 공간벡터의 변환
2. 선형변환과 행렬
§1. 선형변환의 뜻
§2. 선형변환의 행렬표시
§3. 역변환과 역행렬
§4. 합성변환과 행렬의 곱
§5. 행렬과 일차연립방정식
3. 여러가지 선형변환
§1. 항등변환
§2. 대칭변환
§3. 닮음변환
§4. 회전이동
Ⅹ. 수열
1. 수열
§1. 수열의 뜻
§2. 수열의 표시
2. 등차수열
§1. 등차수열
§2. 등차수열의 합
3. 등비수열
§1. 등비수열
§2. 등비수열의 합
4. 여러가지 수열
§1. 합의 기호와 그의 성질
§2. 계차수열
§3. 수학적 귀납법
Ⅺ. 극한
1. 수열의 극한
§1. 무한수열의 수렴·발산
§2. 극한값의 계산
§3. 무한급수의 수렴·발산
2. 함수의 극한
§1. 함수의 극한
§2. 초월함수의 극한
§3. 함수의 연속성
Ⅻ. 미분법
1. 미분법
§1. 미분계수
§2. 도함수
§3. 미분법의 성질
§4. 초월함수의 도함수
§5. 고계도함수
2. 도함수의 응용
§1. 접선
§2. 평균값의 정리
§3. 함수의 증감
§4. 함수의 극대·극소
§5. 곡선의 개형
§6. 방정식과 부등식에의 응용
§7. 속도와 가속도
§8.*함수의 근사치 표시
ⅩⅢ. 적분법
1. 부정적분
§1. 부정적분
§2. 치환적분
§3. 부분적분
2. 정적분
§1. 구분구적법
§2. 정적분
§3. 치환적분·부분적분
3. 정적분의 이용
§1. 면적
§2. 체적
§3. 속도와 거리
ⅩⅣ. 확률
1. 순열과 조합
§1. 경우의 수
§2. 순열
§3. 조합
§4. 이항정리
2. 확률
§1. 시행과 사건
§2. 확률의 뜻
§3. 기대값
ⅩⅤ. 통계
1. 확률분포
§1. 확률변수와 확률분포
§2. 이산확률변수와 확률함수
§3. 연속확률변수와 확률밀도함수
§4. 평균과 표준편차
§5. 이항분포
§6. 정규분포
2. 통계적 추측
§1. 모집단과 표본
§2. 표본평균과 표본표준편차
§3. 표본평균의 분포
§4. 모평균의 추정
§5. 모평균의 가설검정
3. 전자계산기와 순서도
§1. 순서도
§2.*간단한 프로그래밍

註 : 1) * 표한 것은 새로이 추가된 주제
2) I-VI은 수학Ⅰ이고 VII-XV는 수학Ⅱ임. 그리고 이 표는 자연계를 기준함.

[圖 4] 函數의 分類



같은 논리의 숙달이 直接證明法 및 間接證明法의 이해에 도움이 되며 따라서 학생들이 數學에서의 여러 가지 定理, 公式 등을 證明함에 있어서 확실한 자신을 가지게끔 만들게 된다.

教育課程(案)의 (Ⅱ)에서는 數와 式에 대하여 演算과 關係를 다루게 되는데 근본적으로 그 다음의 (Ⅲ)에서 다루는 二項演算과 二項關係의 具體的인 例에 해당된다. 학생들로 하여금 演算의 性質과 關係의 性質을 數와 式으로 숙달시키기 위한 目的과 아울러 中學課程에서 體系化되어 있지 않은 數와 式의 體系를 整理하는 데에 (Ⅱ)의 目的이 있는 것이다. 특히 하나의 變數 x에 대한 式의 分類는 〔圖 4〕에서 보듯이 函數의 分類와 동일하며 이 분류는 18세기에 Euler가 그의 著述에서 밝힌 바 있다. 그리고 뒤에 언급할 方程式과 不等式의 分類도 이 체계에 따르는 것이 일반적이다.

(Ⅲ)의 二項演算과 二項關係라는 주제는 필자가 여러번 강조해 온 주제로서, 이제까지 教科書에서 體系的으로 다루지 않았던 것이며, 특히 단순한 集合에서 한걸음 더 나아간 體系(system)[17]로서 群(group)과 體(field)를 포함시킨 사실에 유의하여야 한다. 群과 體를 高校課程에 포함시켜야 하는가의 문제는 여러 논란이 있을 수 있으나 뒤에 다를 벡터와 함께 社會科學과 自然科學의 모든 分野에서 항상 活用되는 주제이다. 體의 元素인 스케일러와 벡타空間의 元素인 벡터의 概念은 中學校의 科學課程에서 피상적으로 다루기는 하지만 數學에서 具體的인 定義와 性質을 다루어야 한다고 생각된다. 實數의 集合이 +, × 演算과 더불어 實數體를 이루고 複素數의 集合도 複素數體가 되는 사실을 이해하는 것이 高等學生의 知的水準에 비추어 볼 때 어려운 일이 아닌 것이다. 더구나 사회생활에서 볼 수 있는 여러 組織, 機關들이 單位部署當 機能과 關係의 概念을 내포하고 있기 때문에, 數學에서 이러한 概念을 숙지시킴이 바람직하다고 생각된다. 會社組織體系, 서울시 交通體系, 醫療傳達體系, 情報通信體系, 經營情報體系 등 體系라는 말이 수없이 사용되고 있는 오늘날, 각 組織을 體系的·構造的으로 이해함에 있어 (Ⅲ)에서 다루는 二項演算과 二項關係의 概念이 필수적이다. 그리고 數學에서 가장 많이 다루는 函數의 概念이 二項關係의 일종이라는

17) 단순히 대상물(元素)들의 모임을 集合(set)이라 부름에 반하여 集合의 元素들에 대하여 演算 혹은 關係들 중 어느 것 하나라도 주어지면 이를 體系(system) 혹은 空間(space)이라 부른다.

사실과 方程式과 不等式의 槪念도 二項關係로서 설명된다는 사실을 감안하면, (Ⅲ)까지의 내용이 高校數學課程의 核이라 말할 수 있다.

敎育課程(案)에서 (Ⅳ)와 (Ⅴ)의 내용은 現行課程과 거의 동일하며 다만 (Ⅴ)의 最大·最小問題에서 가장 간단한 線型計劃法에 해당되는 문제를 추가하여 다루는 것이 바람직하다고 생각된다.

(Ⅵ)의 내용은 現行課程에서 人文系와 自然系에 따라서 다루는 범위가 다른 주제들로서, 그 구분은 人文社會科學의 學者들이 앞으로 그 수준을 결정하여야 한다고 생각된다. 여기서 現行課程에서 常用로그에 대하여 많은 紙面을 할애하고 있지만, 옛날의 계산자는 거의 쓰이지 않고 휴대용 계산기를 사용하는 현실을 감안할 때 간단히 다루어도 좋을 것이다.

이상의 (Ⅰ)부터 (Ⅵ)까지의 내용은 數學Ⅰ에 해당되고 (Ⅶ)부터 (ⅩⅤ)까지는 數學Ⅱ인바, 數學Ⅱ에서 自然系와 人文系의 區分은 추후 硏究·檢討하여 결정할 문제라고 생각된다.

(Ⅶ)의 空間圖形은 基本的으로 空間座標의 이해를 통하여, (Ⅴ)의 平面座標와 더불어 벡타空間의 槪念으로 유도될 수 있는 내용이다. 空間座標는 解析幾何에 해당되는 주제이지만, 오늘날 數學에서는 (Ⅷ)의 벡타空間에서 이를 일반화하여 더욱 활발히 다루고 있는 실정이다. 다시 말하자면 이 空間座標는, 앞에서 實數體를 이해하기 위한 實例로서 實數의 演算을 다루었듯이, 벡타空間의 한 例로서 나타나게 된다. 벡타空間의 槪念에서 가장 중요한 것이 次元(dimension)과 基(basis)의 槪念으로서 이들을 학생들에게 이해시킴에 많은 연구가 필요하다고 생각된다. 이 槪念들이 高校課程에서 다루어져야 하는가에 대하여 반대의 의견이 있을 것으로 예견되지만, 다음의 (Ⅸ)에서의 行列을 설명함에 있어서 가장 편리하고 필수적이므로 敎科課程에 포함시켜야 한다고 생각된다. 현행의 과정에서 自然系에서만 벡타를 다루고 있고 行列이 人文系와 自然系 모두에서 다루어지고 있는 사실도 앞으로 수정되어야 한다고 생각된다.

(Ⅸ)에서는 벡타空間上의 函數에 해당하는 線型變換[18]과 이를 나타내는 行列을 다룬다. 行列을 직사각형의 數字 配列로 定義하고 이의 機械的인 演算만을 다룬다면 行列의 여러 性質을 이해함에 곤란을 겪는 경우가 많게 된다. 따라서 行列은 벡타空間의 각 元素, 즉 각 벡타를 다른 벡타로 對應 혹은 變換시키는 函數로 이해하여야만 逆函數를 나타내는 逆行列, 合成函數를 나타내는 行列의 곱 등이 쉽게 이해되며 聯立一次方程式의 函數的 解釋도 가능하게 된다. 물론 이러한 線型變換의 槪念으로서 行列을 설명하기 위하여 앞의 벡타空間과 함께 그 내용을 잘 구성하여야 할 것이다.

(Ⅹ)의 數列은 自然數(n)의 集合에서 實數集合으로 보내는 函數 $f(n)$으로 정의되는바, 高校課程에서는 주로 n의 一次函數 $f(n)=an+a_0$와 n의 指數函數 $f(n)=a_0r^n(r\neq 1)$을 다루고 있다. 이와 같은 두 종류의 數列은 각각 等差數列과 等比數列로 불리어지며, $a_{n+1}=\alpha\cdot a_n+\beta$의 循環型(혹은 漸化式)으로 표시하는 경우에 $\alpha=1$이면 等差數列, $\beta=0$이면 等比數列을 나타나게 된다. 이와 같은 數列의 理論은 다음의 數列 및 級數의 收斂·發散, 函數의 極限,

18) 現行 敎科書에서는 一次變換이라 부르고 있으나 線型性(linearity)을 갖고 있는 線型變換(linear transformation)이라 부름이 타당하다.

實數의 連續性 등으로 연결된다. 그리고 Σ의 演算과 數學的歸納法의 證明法을 여기서 다루게 된다.

(XI)의 極限, (XII)의 微分法, (XIII)의 積分法은 解析學의 기본적인 주제로서 현행과정과 거의 동일하며 다만 函數의 近似値 表示가 추가되어 있다. 그 이유는 電子計算機를 이용하여 三角函數, 指數函數, 로그函數들의 函數値를 계산할 때 級數로 近似値를 계산하는 연유로, 이에 대한 基本原理를 제공하여 주기 위함이다. 특히 이 주제들에서는 例題, 問題들을 實生活과 밀접한 것으로 택함이 학생들이 이해하기에 많은 도움이 되리라 생각한다.

마지막으로 현행 教科課程에서 가장 취약한 부분이 (XIV)의 確率과 (XV)의 統計分野인데, 이 分野가 高等學校 數學課程에 독립적으로 취급된 역사가 오래 되지 않았기 때문이라 생각되며, 아울러 외국의 경우와 달리 그리 큰 비중을 두지 않았던 것으로 이해된다. 그러나 근본적으로 日常生活에서의 모든 사물이 不確實性을 內包하고 있으므로, 가장 확실하고 분명한 數學科目에서 다루는 여러 가지 數學의 表記法과 理論을 도구로 삼아, 確率과 統計에 대한 基礎的 理解를 제공함과 동시에 실생활에서 얻어지는 多樣한 性質의 情報를 蒐集·分析·判斷할 수 있는 能力을 提高시킴이 이 주제의 목표인 것이다. 따라서 國民學校부터 中學校에 이르는 記述統計에서 벗어나 推論統計를 다루게 되어, 推定 및 檢定이 이 부분에 포함되어 있다. 現行 教科內容을 보면 개념적으로 이러한 사실을 이해하기 힘드므로 이에 대한 많은 研究가 필요하다고 생각된다.

끝의 電子計算機와 順序圖는 現行課程에서는 數列의 뒤에, 改正案에서는 統計의 뒤에 배열하고 있지만, 앞으로 電子計算機에 대한 獨立課程이 제공될 것이므로 별 차이는 없다고 본다. 다만 數學教科課程에 이를 포함한 이유는 演算의 原理, 論理의 흐름과 演算, 數의 表示 등이 數學의 主題에 해당하기 때문에 廣義로 해석하자면 數學의 한 應用分野에 해당되므로, 〈表 4〉에서도 개정안을 따랐다. 그리고 간단한 프로그래밍은 中學校의 프로그래밍 言語보다는 한층 複雜한 機能을 갖는 言語를 만들어 학생들을 훈련시켜야 할 것이다.

Ⅳ. 數學教育의 改善方向

1. 行政 및 制度改善

前章에서 밝힌 바와 같이 現實的 要求를 충족하는 實用的 數學의 教育이 數學教育의 目標임에 반하여, 이에 대한 체계적인 연구가 결여되어 文教行政과 入試制度를 비롯한 教育制度의 여러 側面에 問題가 많다. 특히 改善이 시급한 사항을 指摘하면 다음과 같다.

(1) 教師의 再教育
(2) 數學教育의 專門研究集團 缺如
(3) 入試制度 및 個人指導

이러한 問題點들과 이에 대한 改善方案은 다음 節에서 다룰 教科書執筆 및 指導評價方法과 相互 聯關되어 있으나, 순차적으로 설명하기로 한다.

가. 教師의 再教育

各級學校에서 상당한 資格을 갖춘 數學教師들을 確保하기 위해서는 많은 노력이 필요하

다고 생각된다. 한 學級의 學生數가 많고 敎師들 자신이 가르치는 주제를 완전히 숙지하지 못한 경우에는 엄청난 敎育의 損失이 예상되며 상당한 수준의 敎師가 확보되었다 하더라도 해를 거듭함에 따라 數學의 內容이 變遷하기 때문에, 國內硏修 혹은 海外硏修를 통하여 數學敎師의 知識을 최신의 것으로 갱신시키기 위한 再敎育이 필요하다. 물론 一線敎師로서 첫출발할 때, 그들이 敎育大學이나 師範大學에서 敎育받은 내용이 最近의 知識과 方法이어야 하지만 이에 못지 않게 再敎育도 중요한 것이다. 현재는 敎師에 대한 評價는 전혀 公開的으로 언급되고 있지 않고 學校의 여러 條件, 文敎行政, 入試制度 등의 問題點들 뒤에 가리워져 있다.

여기서 敎師들의 知識 이외에 소홀히 취급되기 쉬운 敎師들의 基本 敎授姿勢도 지적하고 싶다. 우수한 학생만을 중시하고 미진한 학생은 소홀히 하는 등 數學敎育이 마치 數學者를 만들기 위한 敎育인 것처럼 되어서도 안되고 現代社會의 여러 分野에 최소한 적응할 수 있는 基本知識을 敎育하여야 함을 敎師들 자신부터 인식하고 있어야 하겠다. 한 學級에 한두 명이 있을 정도의 능력있는 학생 위주로 試驗問題를 作成한다거나 미진한 학생의 試驗結果에 대하여 그 책임을 학생에게만 돌리는 것은 앞으로 改善되어야 할 것이다.

國民學校 敎師는 國民學校 1학년부터 6학년에 이르는 모든 科目을 가르쳐야 하는 복잡하고 과중한 업무를 맡고 있기 때문에 各 科目에 대하여 모두 專門的인 水準을 유지할 수 없다. 그러나 數學敎育이란 학생들이 知識을 習得하는 것보다도 體系的으로 思考하는 方法에 더 큰 比重이 주어지기 때문에 開發된 敎育方法, 中·高等學校에서 나타나는 새로운 槪念 등을 敎師 自身이 알고 있어야 한다. 國民學校의 모든 敎師들이 이러한 敎育을 받기 힘들다면 적어도 한 學校에서 한 敎師가 이러한 再敎育을 받아 다른 敎師들의 指導者 役割을 하여야 하며 이러한 敎師의 再敎育은 旣存大學을 이용하든가 새로운 專擔機關을 設立하여 國內外의 硏修計劃을 검토·시행하여야 한다 (물론 이러한 문제는 數學科目뿐만이 아니라 다른 重要科目에도 해당됨).

中·高等學校 敎師들에 대한 再敎育도 國民學校 敎師의 경우와 같고 이러한 敎育은 하나의 階層을 이루어 上位 水準의 數學知識을 敎師들이 알고 있어야 한다는 原則에 적용된다. 다만 中·高等學校의 경우는 科目別로 專門敎師가 담당하기 때문에 再敎育機關을 통해서나 동일한 科目의 擔當敎師들로 이루어진 情報交換組織등을 통하여 敎授方法의 改善을 誘導할 수 있다.

나. 數學敎育의 專門硏究集團 缺如

현재 우리나라에서는 數學敎育課程의 改正, 敎授方法, 多樣하고 適切한 評價를 위한 問題作成 등에 대하여 專門的인 硏究가 없고, 있어도 短期間의 作業을 통하여 決定되는 일이 많기 때문에 試行錯誤를 일으킬 여지를 많이 남기고 있다. 한 달 정도의 짧은 기간을 통한 入試問題 作成, 國民學校·中學校·高等學校의 敎育內容을 一貫性있게 總體的으로 構成하는 問題, 小主題들에 대한 追加, 削除와 自然系·人文系의 主題配列 등 여러 문제들을 長期的으로 硏究하여 發展시킬 수 있는 硏究集團이 필요하다. 이 硏究集團이 敎師의 再敎育 專擔機關과 統合되어 組織되는 것도 效果的이라

생각된다. 여기서 특히 강조하고 싶은 것은 數學의 敎育內容을 改編하는 作業에서 數學敎育의 專門家 이외에 人文·社會·自然系列의 여러 다른 分野의 學者들의 要求와 助言을 수용함이 急變하는 현대생활에서 數學敎育의 役割을 增進시킴에 큰 도움이 된다는 사실이다.

다. 入試制度 및 個人指導

우리나라는 학부모들이 자녀들의 敎育 및 入試에 대하여 關心과 熱誠이 지대한 국가들 중의 하나이다. 이러한 熱誠은 學歷別 賃金隔差 등 여러 社會的 與件이 이를 조장하고 있어 부정적인 면도 있지만, 肯定的인 면에서는 날로 치열해가는 國際的 技術競爭에서 한발 앞서 나아가는 原動力으로도 생각될 수 있다.

入學試驗의 目的은 基本的으로 입학후에 敎育課程을 충실히 履修할 수 있는 학생을 선별하는 데에 있다. 入試에서의 評價는, 엄밀히 말하자면 選擇하는 進路에 따라서 학생이 현재 알고 있는 여러 科目의 知識이 장래의 學業遂行에 항상 直結된다고는 볼 수 없기 때문에 內申成績 등을 고려하여 綜合的인 判斷을 필요로 한다.

大學校 入學試驗의 경우 自然系, 人文系, 社會系에 따라, 또한 동일계에서도 學科에 따라 科目別 加重値가 다를 수 있으며, 學生의 適性 및 能力이 현재의 知識보다도 장래의 學業遂行에 영향을 많이 주기 때문에 입학시험을 통한 학생의 선발은 學校와 學科의 特性이 고려될 수 있도록 大學校의 自律的인 運營에 일임하는 것이 바람직하다.

自律的인 選拔制度는 과거에 오랫동안 실시한 경험이 있다. 우리나라와 같이 劃一的이고 統制된 入學試驗制度는 다른 나라에서는 찾아볼 수 없다. 따라서 過去의 入試制度로 還元하는 방향으로 改善되어야 할 것이다.

1991년도부터 入試를 大學에 일임한다는 文敎政策이 발표된 것은 무척 다행스러운 일이라 하겠다. 물론 大學에 따라 入學試驗問題를 客觀性있게 出題할 수 있는가, 혹은 入試의 중요성이 지나치게 큰 현실정에서 大學마다 상이한 入試基準이 高校敎育課程에 부정적인 영향을 미치지 않을까 하는 우려는 있을 수 있다. 그러나 앞의 (가)와 (나)항에서 언급된 機關과 制度가 유기적으로 조화된다면 대부분의 문제가 해소되리라 생각된다.

예를 들면 問題銀行의 運營, 大學敎授와 高校敎師와의 交流, 高校敎育方法에 따라 다르게 미치는 大學에서의 學習效果의 評價 등, 현재 미처 관심을 두지 못하는 부분까지 개선될 여지가 있다.

數學科目의 목표는 體系的인 思考方式의 訓練에 큰 비중이 있는바 客觀式 問題로서는 제대로 評價될 수 없다. 특히 幾何問題는 客觀式으로는 전혀 評價할 수 없는 것이다. 그러므로 현재 점차 主觀式, 客觀式 혹은 混合의 선택을 각 大學에 일임하는 것이 거론되고 있는 것이다. 아뭏든 이는 장래 大學에서의 學習能力과 연결되므로 이에 대한 效果分析이 필요하다. 大學入試뿐만이 아니라 高校入試에서도 科學 특히 數學科目의 主·客觀式 問題出題에 대한 효과를 분석하여야 하며, 뒤에서 언급할 敎科課程 內容, 學習指導 方法(注入式과 質問·應答式) 등도 아울러 硏究·檢討되어야 한다.

個人指導의 禁止도 여러 문제점을 제기하고 있다. 입시에 의한 학생선발은 入學定員이 存在하는 한, 合格者와 不合格者의 구분이 불가

피하며 이는 아무리 좋은 入試制度를 채택하여도 피할 수 없는 結果이다. 따라서 추후 上級學校에서의 學業 成敗를 불문하고 進學機會부터 박탈당한다는 심각한 현실을 극복하기 위해서, 혹은 현재의 부진한 과목을 個人的인 特性에 맞추어 學力을 增進시키기 위해서, 학교의 정규수업 이외에 보충수업 혹은 과외수업의 필요성이 대두되게 된다. 특히 과외수업의 경우는 과거에 學校間 不均衡, 地域間 不均衡, 貧富의 隔差 등 여러 社會問題와 연결되어 나타난 非合理的 現象 때문에 政策上 이를 禁止시켜 왔다. 이 결과 나타나는 효과는 정확히 판단할 수 없으나 적어도 여러 불균형은 계속 존재하고 있고 비밀과외수업의 현상도 분명히 나타나고 있다고 본다. 이러한 不均衡은 行政力을 동원한다고 하여도 근절될 수 없으며 國家的 次元에서 다소 均等한 機會를 提供하는 방법을 통하여 감소시킬 수 있는바 이를 提案하면 다음과 같다.

최근의 괄목할 만한 情報通信技術의 발달과 TV受像機의 普及擴大를 볼 때, 이러한 새로운 大衆情報媒體를 이용하여 전국적으로 학생들에게 도움을 줄 수 있는 방법을 설명하고자 한다.

현재 KBS 제3 TV는 教育放送으로서의 役割을 담당하고 있지만 國民學校, 中學校, 高等學校의 여러 과목의 내용을 체계적으로 학생들에게 제공할 수 없다고 본다. 따라서 初·中·高를 개별적으로 전담하는 세 放送局을 설치, 유능한 教師로 하여금 강의하여 하고, 그 내용을 전국의 學校와 家庭의 학생들에게 전달하는 것이 한 방법이라 생각된다. 더욱 山間僻地나 落島의 몇몇 教師가 각급 학생을 지도할 때 VTR 등의 이용은 매우 효과적이라 생각된다. 각 가정이나 학교에서 미처 시청하지 못한 부분은 有·無線을 이용함으로써 데이터베이스 提供業務와 유사하게 보급될 수 있으며 독자적으로 VTR 테이프로서도 제공될 수 있기 때문이다.

더욱 公共圖書館, 學校圖書館, 私設讀書室 등에서도 적절한 시설에 의하여 이러한 學習媒體를 독학하는 학생에게 개별적으로 제공할 수도 있다. 先進國에서도 大學의 講義에 VTR을 많이 활용하고 컴퓨터를 이용한 教育(CAI) 技術이 점차 발달하고 있음을 감안한다면 충분히 가능한 방법이다. 물론 이러한 방법을 채택하기에는 國家의 豫算, 技術的인 問題, 講義內容의 錄畫 등 많은 어려운 문제가 나타날 것이지만 教育에 대한 學父母의 지대한 관심을 감안한다면 필히 研究開發하여야 할 課題라고 생각된다.

2. 數學教科書의 執筆 및 指導評價 方法의 改善

최근 우리의 주변을 돌아보면 統計와 確率의 基本知識, 컴퓨터와 프로그래밍, 數値的 數學 등은 數學的 教養의 必須要素들이며 특히 大學에 진학하지 않는 학생들을 염두에 둔다면 더욱 고려되어야 할 주제들이다. 학교에서 數學科目에 할애되는 講義時間을 갑자기 증가시킬 수도 없으므로 數學教科課程의 改編 및 學生의 進路에 따라 數學教科課程上의 小主題들을 선택할 수 있는 柔軟性이 필요하게 된다. 그리고 이에 따른 적절한 指導와 評價方法을 再檢討하지 않을 수 없다.

위와 같은 問題를 定義하고 解決하기 위하여 前節에서 언급된 專門研究集團이 長期的으

로 硏究하여야 하지만, 과도기 상태에 있는 현재 가장 절실하다고 생각되는 몇가지 문제들을 구체적으로 설명하고자 한다.

가. 數學敎科書 執筆 및 檢定

現行의 敎科書 執筆 및 檢定過程을 살펴보면, 國民學校와 中學校의 數學敎科書는 文敎部에서 主管하여 저작하였고, 高等學校의 경우는 여러 執筆者들이 제출한 敎科書들 중에서 가장 잘 구성되었다고 판단되는 5개의 敎科書를 選定하여 문교부 檢定敎科書로 전국에 배부하고 있다. 1989년부터는 中學校敎科書도 교과내용을 개편하여 5개의 文敎部 檢印定敎科書로 바꿀 예정이며 高等學校 敎科書는 敎科課程만 1990년부터 改編하여 사용할 예정이다.

中學校의 경우처럼 이렇게 점차 문교부 주관에서 탈피, 檢印定敎科書로 轉換하는 정책은 매우 바람직하지만 여기에 몇가지 유의할 점이 있다고 생각된다. 첫째, 여러 執筆者가 작성한 敎科書들 중에서 5개를 선택하는 문제로서, 質的인 측면에서 5개 이상의 敎科書가 수준급인가 하는 의문이며, 둘째 執筆者들에게 제공되는 敎育課程 指針書가 충분히 여러 분야의 學者들과 論議되어 작성되는가의 의문이며, 세째 檢印定過程에서 內容, 例題, 問題 등이 면밀히 檢討되고 있는지의 여부가 중요한 것이다. 적어도 이러한 유의점이 상당한 수준으로 고려된다면 敎科書 執筆은 자유로이 開放하는 것이 타당하다.

敎科課程上의 각 主題들은 執筆者의 見解에 따라 그 配列의 상이하고 例題, 問題들도 다르므로 學習效果에 대한 比較·硏究가 필요하다. 우리나라의 경우는 대략 5년 週期로 敎科課程이 改編되고 있는바, 이번의 교과과정 개편시만이 아니라 그 이후의 개편을 위해서도 이러한 硏究를 장기적으로 하는 것이 바람직하며 이 硏究의 결과가 入試問題등 評價方法에도 反映되길 도모하여야 한다. 그리고 敎科書보다는 參考書에 더욱 의존하는 현재의 풍토에서, 학생들에게 주는 二重的인 負擔, 敎師들에게 주는 問題作成의 負擔을 덜어주기 위하여 良質의 問題를 體系的으로 제공할 수 있는 問題銀行 및 동일한 주제의 문제이더라도 몇 개의 能力別 水準으로 區分하여 提供되는 방법이 앞으로 硏究·開發되어야 하겠다.

나. 數學科目의 指導方法

過密學級, 학생들간의 學業能力差異, 敎科課程 改編, 入試問題에서의 主·客觀式 轉換, 광범위한 主題의 熟知 등 이러한 모든 문제가 敎師들에게 매우 큰 부담을 주고 있다. 그리고 학생의 입장에서 보면 한정된 敎師의 指導時間으로 인하여 參考書를 통하거나 個人敎授를 통한 補充學習이 필요하게 되어 막대한 物的·心的 負擔이 加重되고 있는 실정이다. 그러나 이러한 제한된 여건 아래에서도 數學科目 指導方法의 改善을 통하여 어느 정도의 學習效果를 기대할 수 있다고 본다. 이에 대한 몇가지를 제안하면 다음과 같다.

(1) 受動的인 注入式 學習보다는 能動的인 質問·應答式 學習을 통한 指導方法
(2) 學生들을 2~3 段階의 水準別로 分類한 指導方法
(3) 새로운 主題의 學習을 위한 問題狀況 (problematic situation)의 使用
(4) 直觀的인 學習을 위한 그래프, 다이아그램 등의 活用
(5) 他科目과 實生活에서 發見할 수 있는

例題를 통한 指導方法

이들 중 몇 개는 文敎部 敎育課程의 指導 및 評價上의 留意點으로 나타나 있지만 개별적으로 간단히 설명하고자 한다.

(1)의 方法은 현재 과중한 업무의 부담을 안고 있는 敎師들이 쉽사리 적용하기 힘든 指導方法이라 생각된다. 그러나 數學의 槪念, 原理, 法則, 關係의 이해로부터 定理 및 公式의 證明에 이르기까지 학생들에게 필요한 創意力, 發見力, 體系化하는 能力을 개발시키는 방법으로서 가장 效果的인 指導方法이라고 國內外에서 報告되고 있다. "learning by doing"의 原則이라든지 美國에서 많이 활용하고 있는 幼稚園 및 國民學校에서의 "show and tell"의 시간은 학생들의 發表力과 함께 能動的인 學習參與의 姿勢를 기르도록 유도하고 있는 것들이다. 敎師들의 역할은 問題의 解答, 定理의 證明을 注入式으로 提供함에 있는 것이 아니라 학생들로 하여금 스스로 解答과 證明을 찾게끔 하는 案內者 혹은 相談者의 역할에 있기 때문에 質問·應答式의 指導方法과 학생 자신의 意思表現을 통한 指導方法을 가능한 사용하여야 한다. 특히 이 방법을 통하여 항상 정답을 맞혀야 한다는 관점에서 떠나 많이 틀릴수록 많은 것을 배울 수 있다는 관점도 인식시켜야 학생들의 精神的 負擔이 덜어지고 學習效果가 증대되게 된다.

(2)의 指導方法은 현재 각급 학교에서 優劣班으로 分離하여 지도하는 방법에서 찾을 수 있다. 敎育이 優秀學生만을 위한 것이 아니므로 敎師들이 미진한 학생들에게도 보다 쉬운 설명을 하고 많은 시간을 할애할 수 있다는 사실에 비추어 본다면 바람직한 방법이다. 그러나 경쟁심에 얽매어 있는 학부모의 입장에서는 그들의 자녀가 무조건 優等班에 속하기를 선호하는 경향이 있고 또한 劣等班에서 優等班 혹은 그 반대로 적절히 移動 配置될 수 있는 柔軟性이 없는 경우가 많기 때문에 운영하기에 따라서 효과가 감소될 수도 있다. 數學敎師가 두 명 이상일 때 敎師들의 부담을 덜기 위하여 優等班, 劣等班을 분담하고, 劣等班에 대하여 보다 쉬운 副敎材 등을 사용한다면 이 방법은 매우 효과적이라 생각된다.

(3)에서는 數學에서의 새로운 主題를 學習하는 方法을 의미하고 있다. 현재 사용하고 있는 기존방법은 定義, 例, 演繹的 論法과 이의 演習, 應用問題, 機械的 反復學習 등을 통하여 새로운 주제를 파악하는 방법이다. 그러나 數學科目 目標에서 밝혔듯이, 數學에 대한 興味와 關心을 지속적으로 갖게 하고 여러 가지 현상을 數學的으로 思考하고 처리하기 위해서는 기존방법보다는 "問題狀況"의 使用을 필요로 하게 된다. 여기서의 "狀況"은 여러 가지 形態의 狀況을 말하고 있다. 즉, 日常生活의 주변에서 나타나는 自然的 혹은 人工的인 事件과 物體들, 이야기 혹은 逸話, 歷史的 話題거리, 게임 및 수수께끼, 具體的인 事物로부터 抽象化되는 數學的 槪念과 構造의 表現, 例示될 수 있는 數學的 事實과 關係, 圖表를 사용한 表現, 他科目에서 數學의 應用, 明確한 答이 존재하는 問題, 혹은 그렇지 않은 問題 등을 비롯하여 여러 형태의 狀況을 들 수 있다.

이와 같은 새로운 상황은 학생들로 하여금 探究心을 불러 일으키게 할뿐만 아니라 그들의 識別力과 創意力을 함양하게 한다. 探究의 過程에서는 먼저 여러 생각을 정돈하게 하며 어떠한 要因들은 중요하게 인식하고 다른 要

因들은 고려하지 않는 등의 判斷能力을 기르도록 한다. 다음에는 문제가 公式化되고 이의 解를 얻는 시도를 하게 되는데, 이러한 과정에서 얻어지는 결과들은 중요한 性質로 形成될 수 있거나 假定 혹은 推測으로 받아들여질 수도 있다. 점차 여러 중요한 要因의 關係들이 體系化되고 각 關係들은 直觀的인 模型, 演繹的 論理, 反證되는 例 등에 의하여 點檢된다. 여기서 敎師의 役割은 학생들에게 靈感을 불어 넣어주고 여러 가지 과정을 안내하는 데에 있다.

이상과 같은 問題狀況을 사용한 指導方法은 數學的 活動의 參與와 數學的 思考方式, 數學的 模型의 理解에 매우 효과적인 방법이다. 그러나 여러 과목을 공부하여야 하는 학생, 過密學級, 이 방법을 위한 교사들의 충분한 준비 등을 고려할 때, 이 방법은 현재 널리 보급되기에는 힘드리라 본다. 따라서 각 학교마다 이를 선택적으로 시도할 수밖에 없고 적절한 여건이 갖추어진 후에 도입함이 바람직하다.

(4)의 方法은, 간단히 말하자면 數學敎育에서 想像力, 直觀力을 통하여 數學的 槪念과 原理를 깨우치게 하는 여러 가지 視覺的 表現의 活用을 의미한다. 이 방법은 유치원에서부터 고등학교, 심지어는 대학교에서 활용되고 있는 바 구체적인 예를 열거하면 다음과 같다.

벤다이아그램, 記述統計에서 나타나는 히스토그램, 꺾은선 그래프, 원 그래프, 막대 그래프, 띠 그래프 등, 樹型圖, 數直線, 二項關係를 나타내는 Cartesian그래프(函數의 그래프, 直交座標 포함), 入力－處理－出力 다이아그램, 順序圖, 幾何學的 圖形의 많은 예가 있고 實物, 模型, 게임에서 사용되는 물건, 畫面 등도 이에 해당된다고 볼 수 있다.

마지막 (5)의 方法은 과거부터 항상 관심의 대상이 되어 왔지만 별 진전이 없었던 방법이다. 심지어는 한 敎師가 여러 과목을 가르치는 國民學校에서도 나타나는 缺陷이며, 각 科目의 敎科課程이 서로 다른 그룹에 의하여 결정되는 사실에서도 이 결함의 원인을 찾을 수 있다.

數學이 다른 여러 과목에 미치는 영향이 빠른 속도로 증대되어 왔고 계속 증대될 추세이므로 앞으로 이 방법은 중요하게 고려되어야 하겠다. 한 가지의 예를 보면, 高等學校의 物理에서 거리, 速度, 加速度의 關係는 微積分을 배운 학생에게는 한 개의 식으로 간단히 설명되는 반면, 物理 敎科書에서는 여러개의 公式으로 나누어져 있어 학생들이 부담과 혼동의 여지를 갖는다는 사실이다. 어쨌든 물질적인 세상에서 볼 수 있는 여러 가지 事物의 特性을 抽象化 및 一般化한 것이 數學이기 때문에 實生活에서의 여러 가지 예를 통하여 數學의 槪念과 原理를 터득케 하고 逆으로 數學에서 개발된 數學的 思考能力을 實生活의 問題에 應用할 수 있도록 학생들을 지도하여야 한다. 물론 이같은 방법을 위해서는, 敎科書에서의 例題, 問題와 더불어 講義의 內容에서 다른 科目과 實生活에서의 問題를 가능한 한 많이 다루어야 할 것이다.

다. 評價方法

評價란 廣義로 解釋하면 學生, 敎師, 敎科課程, 심지어는 敎育시스템 전체에 대한 情報를 蒐集하여 判斷하는 過程을 말하며, 狹義로 解釋하면 敎育을 받는 학생의 여러 가지 能力을 判斷하는 過程을 말한다. 이 과정은 敎育課程에서 매우 중요한 위치를 차지하고 있는 반면,

오늘날 社會的 價値시스템이 變遷함에 따라 수반되는 敎育의 變化에서, 그 영향을 敎科內容, 指導方法보다는 덜 받는 것으로 생각되기 쉬운 과정이다. 敎育의 結果에 대한 評價의 情報는 광의의 모든 요소들에 再照明되어 여러 가지 改善點들을 찾게 된다. 더군다나 入學試驗制度, 行政考試, 資格考試 등의 社會的 制度上의 要求에 의한 評價는 각 개인에게 막대한 가치를 부여하고 있기 때문에 制度上의 問題點들이 논란의 대상이 되는 것이다.

數學敎育에서의 評價도 敎科內容, 指導方法과 함께 매우 중요한 위치에 있다. 여기서는 數學敎育에 한하여, 왜 評價하는가, 무엇을 評價하는가, 어떻게 評價하는가의 세 가지 분야로 나누어 언급하고자 한다.

평가를 하는 이유를 알아보기 위하여 먼저 競爭的인 評價를 살펴보면, 이는 학생들에게 더욱 열심히 공부하도록 자극하는 것을 목적으로 하고 있다. 물론 이러한 목적으로 학생들에게 강요하여만 되는가, 혹은 이 방법이 최선의 길인가 하는 의문이 있지만 肯定的인 效果는 지금까지 잘 알려져 있다.

이와는 반대로 학생들에게 緊張感과 두려움을 주고, 暗記爲主의 공부를 강요하게 되고, 학생들이 不正行爲를 하는 등의 否定的인 效果를 들 수 있다. 더욱 무슨 방법을 사용하더라도 다른 학생보다 높은 등급을 받아야 한다는 非道德的 價値觀이 형성되어 그 영향이 장래의 사회생활에까지 미치게 된다. 그러나 하위의 점수를 받더라도 부정행위가 더욱 자기 자신을 모독한다는 관념이 확립되고, 評價에 客觀性을 提高시킨다면 否定的이고 過去指向的인 측면보다 肯定的이고 未來指向的인 측면으로 이의 가치가 인정될 수 있다.

入學試驗처럼 경쟁적이며 선별을 목적으로 하는 評價는 엄밀히 말하자면 敎育시스템의 外的狀況에서 일어나는 評價라고 볼 수 있는데, 이러한 평가와는 달리 敎育시스템의 內的發展을 도모하기 위한 評價가 오늘날 점차 중요한 역할을 하게 된다.

後者의 評價는 예를 들면 敎科內容 開發, 學習遲進兒의 實力診斷, 適正規模의 學生數 決定, 主題들의 配列 등을 위하여 실시되며 그 결과는 다시 敎科內容, 指導方法에 감안된다. 만일 어느 학교에서 매주 試驗을 實施하고 그 결과가 지도방법에 감안되지 않는다면 학생들에게 부담만 줄 뿐 큰 효과를 기대할 수 없는 것이다.

數學科目에서 무엇을 評價하는가의 問題는 敎科內容과 관련되지만 단순한 知識의 習得程度를 알아보는 것에 덧붙여 計算力, 理解力, 應用力, 創意力 등의 能力을 評價하는 것으로 이해되어야 한다. 일반적으로 下位의 能力水準부터 階層別로 나열하면 知識－計算力－理解力－應用力－創意力으로 되는바, 主題와 能力水準에 맞추어 試驗問題가 出題되어야 한다. 특히 主題別, 能力別 問項數의 決定은, 일반적으로 試驗時間이 한정되어 있기 때문에 매우 중요한 일이 되며 問題類型으로 나타나는 評價方法과 함께 고려되어야 한다.

評價方法, 즉 어떻게 評價하는가의 문제는 앞에서 말했듯이 問題類型과 관련된다. 問題類型은 크게 客觀式 問題(objective question)와 主觀式 問題(subjective question)로 구분된다. 客觀式 問題는 採點者의 見解가 反映될 여지가 없이 그 解答이 명확히 판단될 수 있는 문제로서 組立型과 選擇型이 있다. 이를 다시 세분하면, 組立型은 短答型과 文章 完成型

으로, 選擇型은 眞僞型과 選多型으로 나누어진다. 主觀式 問題는 數學에서의 證明問題, 語學의 作文問題 등에서 볼 수 있듯이 隨筆型, 敍述型이 대부분이다. 요즈음 입학시험에서의 短答型과 完成型을 主觀式 問題로 분류하고 있는 것은 잘못된 것이다. 이렇게 여러 問題類型을 主題別, 能力別 評價에 사용하는 데에는 많은 硏究가 필요하다. 出題와 採點에 소요되는 時間과 人力의 측면으로는 選多型이 매우 큰 利點을 갖지만, 能力評價의 측면으로 볼 때 잘못 출제되는 경우가 많다. 예를 들면 다음과 같은 문제는

(問) 다음 방정식의 해집합은 어느 것인가?

$x^2-x-6=0$

(a) {−2, 3} (b) {2, −3} (c) {2, 3} (d) {-2, -3}

나열된 해답을 참고하지 않고 풀 수 있는 문제이다. 또한 각 해답을 문제의 방정식에 대입함으로써 정답을 찾을 수 있다. 이러한 이유로 이 문제는 선다형으로 출제함에 부적당하며 더욱 무엇을 평가하려고 하는지를 알 수 없다.

이와는 반대의 경우로 문제를 잘 구성한다면 選多型의 여러 가지 이점을 최대로 활용할 수 있다. 예를 들면, 主評價에 대한 事前的인 評價로서 選多型을 사용하면 여러 能力別 統計値를 蒐集하여 分析할 수 있다. 그리고 選多型의 問題가 主觀式보다 상대적으로 쉽고 또한 下級의 能力을 評價함에 사용된다고 잘못 인식하고 있는데, 문제를 구성하기에 따라 높은 수준의 능력을 종합적으로 평가할 수도 있는 것이다.

創意力은 主觀式 問題로 評價됨이 일반적인데 그 이유는 정답 혹은 정답에 이르는 방법이 다양하게 있을 수 있기 때문이다. 主觀式 問題의 評價에서 客觀性을 높이기 위하여 複數의 採點者를 사용하기도 한다. 그리고 試驗時間이 항상 制限되어 있기 때문에 주어진 시간내에 적절한 해답을 구하는 것이 엄밀히 볼 때 創意力을 評價하고 있는지의 疑問은 항상 남아 있다.

어쨌든, 종이와 연필만의 사용, 제한된 評價時間, 評價하고 싶은 知識 및 能力 등을 총체적으로 감안하여 評價方法을 構想하여야 하며, 그 결과가 敎育課程의 諸要素들에 다시 반영되어 質的인 敎育의 發展을 도모하여야 하겠다. 아울러 앞에서도 언급한 問題銀行의 開發, 良質의 參考書 使用, 敎師들의 出題 등에 대한 많은 硏究가 필요하다.

▷ 參 考 文 獻 ◁

敎育大學 數學敎材硏究會, 『算數敎育』, 1970.

서울大學敎師範大學 科學敎育硏究所, 『數學의 發展과 數學敎育』, 1978.

韓國敎育開發院, 『高等學校 數學科 敎育課程 改正試案』, 1987.

韓國放送通信大學, 『國民學校敎師를 위한 數

學』, 1973.

Boyer, C.B., *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, Inc., 1968.

Butler, C.H. and F.L. Wren, *The Teaching of Secondary Mathematics*, 4th ed., McGraw-Hill Book Co., 1965.

Cajori F., *A History of Elementary Mathematics*, The Macmillan Co., 1957.

Davis, D.R., *The Teaching of Mathematics*, Addison-Wesley Press, Inc., 1951.

Groza, V.S., *A Survey of Mathematics*, Holt, Rinehart and Winston Inc., 1968.

Japanese National Commission for Unesco, *Guidebook for the Teaching of Mathematics in Upper Secondary Schools in Japan*, 1974.

Polya, G., *Mathematical Discovery*, John Wiley & Sons, Inc., 1965.

Servais, W. and T. Varga, *Teaching of Mathematics*, A Unesco Source Book, Penguin Books Ltd., 1971.

Unesco, *New Trends in Mathematics Teaching*, Vol. Ⅲ, 1972.

_____, *New Trends in Mathematics Teaching*, Vol. Ⅳ, 1979.

Wilder, R.L., *Evolution of Mathematical Concepts*, John Wiley & Sons, Inc., 1968.

_____, *Introduction to the Foundations of Mathematics*, 2nd ed., John Wiley & Sons, Inc., 1965.